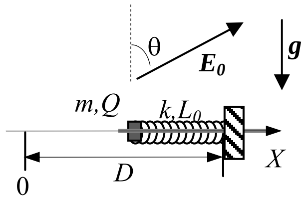
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE – 11/1/2013

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un manicotto (puntiforme!) di massa m può scorrere **con attrito trascurabile** lungo una guida rigida e fissa (un tondino) disposta lungo la direzione orizzontale. Il manicotto possiede una carica elettrica $Q > 0$ ed è vincolato a una molla di massa trascurabile, costante elastica k e lunghezza di riposo L_0, il cui altro estremo è inchiodato a un muretto, in una posizione che si trova a distanza $D = 2L_0$ dall'origine del sistema di riferimento (asse X indicato in figura, orientato verso destra). In tutta la regione di spazio di interesse per l'esperimento insiste un campo elettrico **esterno uniforme e costante** di modulo E_0. Come rappresentato in figura, la direzione di tale campo forma un angolo θ rispetto alla direzione verticale e il verso è "verso destra". [In questo esercizio non si conoscono i valori numerici delle varie grandezze in gioco: dunque dovete fornire risposte nelle quali compaiono le espressioni "letterali" dei dati noti, cioè quelli specificati sopra]



a) Come si scrive l'equazione del moto $a(x)$ del manicotto nel sistema di riferimento dato? [Dovete scrivere una **funzione** di x, posizione generica del manicotto **nel riferimento dato**]

$a(x)$ = …………………………………… $-(k/m)x+(k/m)(D-L_0)+QE_0\sin\theta/m=-(k/m)x+(k/m)L_0+QE_0\sin\theta/m$ [il manicotto è vincolato a muoversi lungo la direzione della guida, dunque l'accelerazione si considera lungo tale direzione (nella direzione ortogonale alla guida essa è nulla a causa del vincolo!). Sul manicotto agisce la componente della forza elettrica $QE_0\sin\theta$ orientata verso destra (la carica è positiva!) e la forza elastica, la cui espressione rispetto al sistema considerato (verificate che i segni siano giusti!) è $k(D-x-L_0)$, da cui la soluzione]

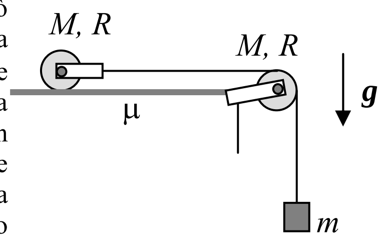
b) Come si scrive la posizione di equilibrio x_{EQ}?

x_{EQ} = …………………………………… $L_0+QE_0\sin\theta/k$ [si ottiene imponendo $a(x = x_{EQ}) = 0$]

c) Supponete ora che il manicotto venga spostato da una qualche causa esterna (una manina) in una certa posizione x_0 (incognita) diversa dalla posizione di equilibrio e che da qui esso venga lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. Sapendo che esso passa la prima volta per la posizione di equilibrio avendo una certa velocità $v' > 0$, determinate la posizione iniziale x_0. [Tenete conto che il segno della velocità significa che il manicotto si sposta verso la destra della figura]

x_0 = …………………………………… $-v'(m/k)^{1/2}+L_0+QE_0\sin\theta/k$ [si può rispondere usando due approcci. Nel primo si parte con il notare che il moto del manicotto è armonico (discende dalla forma dell'equazione del moto!) per cui la legge oraria della velocità recita $x(t) = A\cos(\omega t+\phi)+x_{EQ}$ e la legge oraria della velocità recita $v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$, con $\omega = (k/m)^{1/2}$. All'istante iniziale si ha $v(t=t_0=0) = 0$, per cui $\phi = 0$. Inoltre nell'istante in cui il manicotto passa per la posizione di equilibrio la velocità è massima (in modulo), per cui $v'=-A\omega$. Da qui si deduce che $A = -v'/\omega$, per cui all'istante $t_0 = 0$ è $x_0 = x(t=t_0=0) = A+x_{EQ} = -v'/\omega + x_{EQ}$, da cui, esplicitando ω e usando x_{EQ} determinata sopra, la soluzione. L'altro metodo si basa sulla conservazione dell'energia meccanica, verificata dato che non ci sono lavori di forze dissipative, per cui $0 = \Delta E_K+\Delta U$. Poiché il manicotto parte da fermo, si ha $\Delta E_K = (m/2)v'^2$. La variazione di energia potenziale contiene due termini, uno dovuto alla forza elettrica e l'altro alla forza elastica: $\Delta U = \Delta U_{ELE}+\Delta U_{ELA}$. Notando che la forza elettrica è costante e uniforme, e che la sua proiezione nella direzione del moto è $QE_0\sin\theta$, si ha $\Delta U_{ELE} = -L_{ELE} = QE_0\sin\theta\Delta x$, con $\Delta x = (D-x_{EQ})-(D-L_0) = L_0-x_{EQ} = -QE_0\sin\theta/k$. Pertanto si ha $\Delta U_{ELE} = -(QE_0\sin\theta)^2/k$. Osservate che, dato che lo spostamento avviene verso la destra della figura, l'energia potenziale elettrica deve diminuire, così come si verifica nell'espressione trovata. Notando che inizialmente la lunghezza della molla è $L_{in} = (D-x_0)=(2L_0-x_0)$ mentre "finalmente" essa è $L_{fin} = (D-x_{EQ})=(L_0-QE_0\sin\theta/k)$, si ha $\Delta U_{ELA} = (k/2)[(L_0 - QE_0\sin\theta/k)^2 - (L_0-x_0)^2] = (k/2)[(QE_0\sin\theta/k)^2-x_0^2+2L_0(QE_0\sin\theta/k-x_0)]$. Mettendo tutto insieme e risolvendo per l'incognita x_0 si dovrebbe ottenere la soluzione, tuttavia con una fatica algebrica maggiore che non con l'approccio precedente!]

2. Un rullo, costituito da un cilindro pieno **omogeneo** di massa M = 1.0 kg e raggio R = 20 cm, può muoversi di **rotolamento puro** (senza strisciamento) su un piano orizzontale scabro, caratterizzato da un coefficiente di attrito μ = 0.50. Il rullo è dotato di un giogo, di massa trascurabile, che ne consente la rotazione attorno al proprio asse con **attrito trascurabile**; una fune inestensibile e di massa trascurabile è collegata al giogo. Dopo essere passata per la gola di una puleggia, costituita da un cilindro analogo al precedente che può ruotare **senza attrito** attorno al proprio asse fisso, la fune termina con una massa $m = M/2$ = 0.50 kg, libera di muoversi in direzione verticale (vedi figura). La fune non slitta sulla gola della puleggia. Tutti gli oggetti sono inizialmente fermi e poi vengono lasciati liberi di muoversi. [Usate il valore g = 9.8 m/s² per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Quanto vale, in modulo, l'accelerazione a con cui la massa M scende verso il basso?

a = …………………………………… = ……….. m/s² $g/5$ = 2.0 m/s² [dette T_1 e T_2 le tensioni che la fune esercita rispettivamente sul giogo e sulla massa m, nelle condizioni del problema (rotolamento puro!) si hanno le seguenti equazioni del moto: $Ma_{CM} = T_1 - F_A$; $I\alpha_{RULLO} = F_AR$; $I\alpha_{PULEGGIA} = T_2R - T_1R$; $ma = mg - T_2$, dove abbiamo usato un asse orizzontale diretto verso destra per il moto del rullo, un asse verticale verso il basso per la massa m, e stabilito come positivo il verso di rotazione orario sia per il rullo che per la puleggia. Abbiamo inoltre notato che rullo e puleggia hanno lo stesso momento di inerzia, $I = MR^2/2$. D'altra parte per l'inestensibilità della fune si ha $a_{CM} = a$, mentre per le condizioni di rotolamento puro e di non slittamento della fune sulla puleggia si ha $\alpha_{RULLO} = a_{CM}/R$ e $\alpha_{PULEGGIA} = a/R = \alpha_{RULLO}$, da cui, mettendo a sistema le equazioni, si ottiene la soluzione]

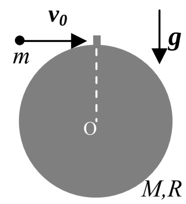
b) Discutete per benino, in brutta, se le condizioni di rotolamento puro assunte nel problema sono realmente possibili.

Discussione: …………………………………… Occorre valutare se la forza di attrito che si origina nel contatto fra rullo e piano scabro è sufficiente per garantire il rotolamento puro. Dalla soluzione del sistema di equazioni riportato sopra si ha $F_A = (M/2)a = ma = mg/5$. Occorre controllare che tale valore sia minore di $F_{A,MAX} = \mu N = \mu Mg = \mu 2mg$. In altre parole occorre che $2\mu \geq 1/5$, circostanza che si verifica abbondantemente, per cui il rotolamento puro è ben possibile.

c) Quanto vale la velocità v' che la massa m acquista dopo essere scesa per un tratto ΔL = 0.50 m?

v' =..……………………………….… = ……….. m/s $(2g\Delta L/5)^{1/2}$= 1.4 m/s [si può utilizzare la conservazione dell'energia meccanica o risolvere direttamente la dinamica della massa. Nel primo approccio, giustificato dalla presenza di attrito statico (per il rotolamento puro) dunque di assenza di energia dissipata, si ha $0 = \Delta E_K + \Delta U = (m/2)v'^2 + (M/2)v'^2_{CM} + (I/2)\omega_{RULLO}^2 + (I/2)\omega_{PULEGGIA}^2 - mg\Delta L = (v'^2/2)(m+M+M/2+M/2) - mg\Delta L = (5/2)mv'^2 - mg\Delta L$, dove abbiamo sfruttato le relazioni cinematiche tra le varie velocità (date da rotolamento puro, non slittamento della fune sulla puleggia, in estensibilità della fune) e la relazione tra le masse. Si ottiene facilmente la risposta. L'altro approccio parte invece dalla conoscenza dell'accelerazione a determinata sopra e dalla constatazione che essa è uniforme e costante. Si ha dunque $\Delta L = (a/2)t'^2$, con t' tempo necessario a fare lo spostamento, e $v' = at'$, dove abbiamo sfruttato il fatto che la massa parte da ferma. Risolvendo si ottiene $v' = (2a\Delta L)^{1/2}$, che è ovviamente analogo al risultato già ottenuto]

3. Un disco pieno e omogeneo di raggio R = 20 cm e massa M = 2.0 kg è imperniato in modo da poter ruotare con attrito trascurabile attorno a un asse fisso che passa per il suo centro (O in figura). Sulla periferia del disco si trova un piccolo dente come rappresentato in figura (il dente ha in realtà dimensioni e massa **trascurabili**!); il disco è inizialmente fermo. A un dato istante un oggetto puntiforme di massa $m = M/4$, dotato di velocità di modulo v_0 = 3.0 m/s diretta orizzontalmente verso la destra di figura, colpisce il dentino. L'urto può essere considerato **completamente elastico**.



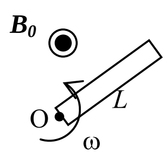
a) Discutete **bene**,in brutta, quali grandezze meccaniche del sistema si conservano nel processo di urto e quali no, e spiegate perché. [Si intende che il processo da considerare è solo quello dell'urto, che ha una durata molto breve]

Discussione e spiegazione: …………………………………… . Poiché l'urto è dichiarato "elastico", si verifica la conservazione dell'energia cinetica totale del sistema. La quantità di moto, invece, non si conserva: infatti, oltre a forze esterne non impulsive (esempio, la forza peso sul "proiettile" e sul disco e la reazione vincolare che il perno esercita sul disco per bilanciare la forza peso), che non vanno considerate vista la breve durata del processo, il perno è in grado di esercitare delle forze impulsive che rendono il sistema non isolato. Tuttavia tali forze hanno braccio nulla (il polo è proprio sul perno), per cui si conserva il momento angolare totale.

b) Quanto vale la velocità angolare ω che il disco acquista subito dopo l'urto?

ω = …………………………………… = ……… rad/s $2v_0/(3R)$ =10 rad/s [sfruttiamo le conservazioni dell'energia cinetica e del momento angolare totali. Per l'energia cinetica si ha. $(m/2)v_0^2 = (m/2)v'^2 + (I/2)\omega^2$, dove v' è la velocità dell'oggetto puntiforme subito dopo l'urto, $I = MR^2/2$ è il momento di inerzia del disco (trascuriamo la presenza del dentino) e ω la sua velocità angolare subito dopo l'urto. Prima dell'urto il disco è fermo e il momento angolare è "portato" solo dall'oggetto puntiforme. Esso vale mv_0R, dove abbiamo notato che la quantità di moto è $m\boldsymbol{v}$ e il "braccio", cioè la distanza tra polo e retta di applicazione del vettore (quantità di moto), è pari a R (quando avviene l'urto il "proiettile" si trova sul dente e la velocità è orizzontale). Poiché si può supporre che la direzione della velocità non cambi subito dopo l'urto, come suggerito nel testo, subito dopo l'urto l'oggetto puntiforme contribuisce al momento angolare totale con un termine $mv'R$. Inoltre subito dopo l'urto al momento angolare contribuisce anche il disco, con un termine $I\omega$ (si noti che, come al solito, si considera il momento angolare assiale e che il segno è preso positivo se la rotazione avviene in senso orario rispetto alla figura). Quindi la conservazione del momento angolare recita: $mv_0R=mv'R+I\omega$. Questa equazione, unita a quella della conservazione dell'energia cinetica, forma un sistema di due equazioni e due incognite. Dalla conservazione del momento angolare si ha infatti $v' = v_0 -(I/(mR))\omega = v_0 - (MR/(2m))\omega = v_0 - 2R\omega$, dove abbiamo sfruttato la relazione tra le masse data nel testo. Usando la stessa relazione, la conservazione dell'energia cinetica recita: $v_0^2 = v'^2 + 2(R\omega)^2$. Sostituendo l'espressione di v' (opportunamente elevata al quadrato) si ottiene: $v_0^2 = v_0^2 + 4(R\omega)^2 - 4v_0R\omega + 2(R\omega)^2$, che è un'equazione algebrica del secondo ordine in ω. Escludendo la soluzione ω = 0, algebricamente possibile ma non significativa (significherebbe che abbiamo "mancato il bersaglio"!), si ha la risposta]

4. Una sottile barretta omogenea di materiale conduttore globalmente neutro, che ha sezione trascurabile e lunghezza L = 20 cm, viene mantenuta in rotazione attorno ad un asse passante per un suo estremo e di direzione ortogonale all'asse della barretta da un operatore esterno (l'asse è indicato con O in figura). La velocità angolare di rotazione vale ω = 20 rad/s ed è costante. Nella zona in cui si trova la barretta insiste un campo magnetico esterno omogeneo e costante, di modulo B_0 = 0.10 T e direzione parallela all'asse di rotazione della barretta. La figura schematizza la situazione e mostra come il campo magnetico abbia direzione e verso uscenti dal foglio mentre la rotazione avviene in verso antiorario.



a) Che direzione, verso e modulo ha la forza $\boldsymbol{F}$ che agisce su una singola carica libera q che appartiene al conduttore (cioè alla barretta)? [Dovete scrivere un'espressione in cui non compaiono dati numerici]

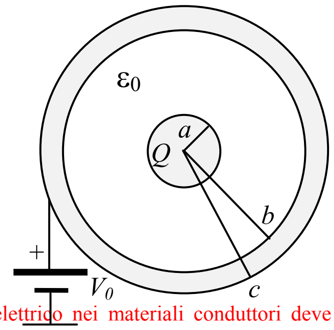
Direzione e verso: …………………………………………… la forza in questione ha origine magnetica ed è dovuta al fatto che le cariche libere del conduttore (negative e positive in ugual numero, essendo la barretta neutra) si muovono in presenza di un campo magnetico. L'espressione vettoriale della forza è $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v}\mathrm{x}\boldsymbol{B_0}$. La velocità delle cariche è in prima approssimazione quella dovuta al trascinamento da parte della barretta. Dunque essa è tangenziale. Il campo magnetico è invece assiale (facciamo riferimento a un sistema cilindrico con asse coincidente con quello di rotazione della barretta) . Pertanto la forza ha direzione radiale. Il verso dipende dal segno delle cariche: le positive vengono spinte in verso centrifugo, le negative in verso centripeto.

F = …………………………………… ωrB_0q [la velocità di una carica ce si trova a distanza r dall'asse di rotazione ha modulo ωr ed è ortogonale al campo magnetico, da cui la risposta]

b) Quanto vale la differenza di potenziale elettrico ΔV che si instaura, se si instaura, tra gli estremi della barretta? [Considerate condizioni stazionarie]

ΔV = ……………………………………= ……… V $\omega B_0L^2/2$ = 0.040 V [ricordando che $\Delta V = \Delta U/q$ e che $\Delta U = -\int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}$, usando l'espressione sopra determinata per la forza che agisce sulle cariche si ha $\Delta V = -\int_0^L \omega B_0 r dr$, da cui la soluzione. Si noti che per quanto riguarda il segno l'estremità della barretta (quella non vincolata all'asse) si trova necessariamente a potenziale minore rispetto all'altra, dato che le cariche positive sono spinte verso questo estremo dalla forza magnetica]

5. Una quantità di carica $Q = 1.0\mathrm{x}10^{-8}$ C è stata messa su una sfera piena di raggio a = 10 cm fatta di materiale **conduttore** omogeneo. La sfera è circondata da un guscio sferico spesso, con raggio interno b = 40 cm e raggio esterno c = 50 cm, concentrico alla sfera e fatto anch'esso di materiale **conduttore** omogeneo; lo spazio tra sfera e guscio, cioè il volume compreso tra $r = a$ e $r = b$, è vuoto. Come rappresentato in figura, il guscio è collegato al polo positivo di un generatore di differenza di potenziale V_0 = 30 V, il cui altro polo è collegato a terra; nella soluzione considerate il sistema in condizioni di **equilibrio**. [Usate $\varepsilon_0 = 8.8\mathrm{x}10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto]



a) Quanto valgono le quantità di carica Q_b e Q_c che si trovano sulle superfici interna ed esterna del guscio (cioè quelle di raggio rispettivamente b e c)? [Spiegate per bene in brutta il procedimento adottato!]

Q_b = ……………………………= …….. C $-Q = -1.0\mathrm{x}10^{-8}$ C [all'equilibrio il campo elettrico nei materiali conduttori deve essere nullo. Dunque anche il campo elettrico nella regione $b<r<c$ deve essere nullo. Tale campo elettrico si determina usando il teorema di Gauss per la simmetria sferica. Il campo elettrico è radiale e dipende solo da r e si ottiene facilmente per la sua intensità: $E(r) = Q_{INT}/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$,. Nel caso $b<r<c$ la carica contenuta nella scatola chiusa (di forma sferica, concentrica con il sistema di sfera e guscio) è $Q_{INT} = Q+Q_b$, da cui la soluzione]

Q_c = ……………………………= …….. C $V_0 4\pi\varepsilon_0 c = 1.7\mathrm{x}10^{-9}$ C [dato il collegamento con il generatore di differenza di potenziale, il guscio **non** è neutro in condizioni di equilibrio. La determinazione della carica si esegue osservando che è nota la differenza di potenziale tra $r = c$ è l'infinito. Infatti, a causa della presenza del generatore un cui polo è collegato a terra (la terra ha convenzionalmente potenziale nullo!), deve essere $\Delta V_{c\infty} = V_\infty - V_c = -V_0$ (si noti il segno negativo, dovuto al fatto che il punto c si trova a potenziale positivo rispetto a terra). Pertanto deve anche essere $-V_0 = -\int_c^\infty \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\int_c^\infty E dr = -\int_c^\infty E(r)dr = -\int_c^\infty (Q_{INT}/(4\pi\varepsilon_0 r^2))dr = -\int_c^\infty ((Q+Q_b+Q_c)/(4\pi\varepsilon_0 r^2))dr = -\int_c^\infty (Q_c/(4\pi\varepsilon_0 r^2))dr = Q_c/(4\pi\varepsilon_0 r)|_c^\infty = -Q_c/(4\pi\varepsilon_0 c)$, dove abbiamo applicato per il teorema di Gauss una scatola sferica di raggio $r>c$ e notato che $Q+Q_b = 0$. Da qui la soluzione]

b) Quanto vale il **potenziale** V' nel punto r' = 0, cioè al centro della sfera?

V' = …………………………….. = ……… V $V_0+(Q/(4\pi\varepsilon_0))(1/a-1/b)$ = 75 V [per definizione, il potenziale in un dato punto è $V' = V'' + \Delta V$, con ΔV calcolato fra i punti r' e r'' , cioè $\Delta V = -\int_{r''}^{r'} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$. Per ottenere una risposta definita numericamente occorre scegliere il punto r'' in una posizione in cui il potenziale è noto. Questo punto può essere $r'' = \infty$, dato che si sa che il potenziale all'infinito è nullo per convenzione. Quindi $V' = -\int_{\infty}^{r'} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$. Nello svolgere l'integrale di linea, in cui ovviamente si tiene conto della direzione radiale del campo elettrico, per cui di fatto ci si muove in direzione radiale, si distinguono diverse regioni. Per $r<a$ e per $b<r<c$ l'integrale è nullo essendo nullo il campo (ci si trova in conduttori all'equilibrio). Dunque rimane: $V' = -\int_b^a E(r)dr - \int_{\infty}^c E(r)dr$. Del secondo integrale sappiamo già (vedi la risposta al quesito precedente, ovvero guarda come è connesso il generatore!) che esso vale V_0. L'altro va calcolato esprimendo il campo in $a<r<b$ con il teorema di Gauss: $\int_b^a E(r)dr = \int_b^a E(r)dr = \int_b^a (Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2))\, dr = (Q/(4\pi\varepsilon_0))(1/b-1/a)$. Mettendo tutto insieme e facendo un po' di attenzione ai segni si ottiene la soluzione]

--- *TERMODINAMICA (opzionale)*

Una certa quantità (incognita) di Elio, un gas monoatomico che può essere considerato perfetto, partecipa ad un ciclo termico composto dalla sequenza di trasformazioni **reversibili**: compressione isoterma A → B, compressione isobara B → C, espansione isoterma C → D, compressione adiabatica D → A. I dati noti del ciclo sono: V_A = 9.00 litri, $V_B = 2V_A/3$ e $V_C = V_B/4$. Si sa inoltre che l'espansione isoterma C → D avviene mantenendo il gas a contatto termico con un termostato costituito da un'enorme massa di acqua e ghiaccio fondente mescolati ed in equilibrio termico fra loro. [Usate R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]

a) Quanto vale il volume V_D occupato dal gas nel punto D del ciclo?

V_D = ... = ... m^3 $\quad V_A(T_A/T_D)^{1/(\gamma-1)} = V_A(T_B/T_D)^{1/(\gamma-1)} = V_A((T_D V_B/V_C)/T_D)^{1/(\gamma-1)} = V_A(V_B/V_C)^{3/2} = 8V_A = 8.00\text{x}10^{-2}$ m^3 [si usano le leggi di isobara e adiabatica reversibile, notando che $T_A = T_B$ e $T_C = T_D$ e che, per un gas perfetto monoatomico, è $\gamma = c_P/c_V = 5/3$]

b) Sapendo che nell'espansione isoterma C → D viene solidificata una massa m = 100 g di acqua (calore latente di fusione del ghiaccio $\lambda_F = 3.33\text{x}10^5$ J/kg), quanto vale il numero di moli n del gas Elio che partecipa alla trasformazione? [Può farvi comodo sapere che $ln(48) \sim 3.87$]

n = ... ~ .... moli $\quad m\,\lambda_F/(RT_F ln(V_D/V_C)) \sim 3.79$ moli [il calore ceduto dal gas nell'espansione serve per far passare alla fase solida la massa m d'acqua, operazione che richiede una quantità $Q = m\lambda_F$ di calore; si noti che la trasformazione avviene, come stabilito nel testo, mantenendo il gas alla temperatura di fusione dell'acqua T_F = 273 K]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 11/1/2013 Firma: