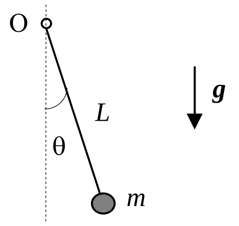
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE – 21/2/2013

Nome e cognome: ……………………………………………………. Matricola: ……………

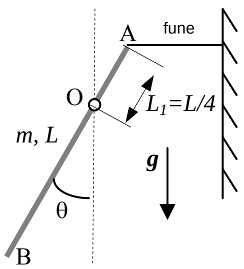
Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un "pendolo" è costituito da una massa puntiforme m attaccata a un filo inestensibile e di massa trascurabile, che ha lunghezza L. Il filo è inchiodato in un punto fisso (indicato con O in figura) e la massa è libera di muoversi su un piano verticale con attrito trascurabile. Inizialmente la massa viene portata a una posizione tale che l'angolo θ misurato rispetto alla verticale (vedi figura) vale $\theta_0 = \pi/3$. A un dato istante la massa viene lasciata libera di muoversi a partire da questa posizione iniziale, avendo velocità iniziale nulla. [Ricordate che $cos(\pi/3) = ½$ e $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$]



   a) Come si scrive la **funzione** $v(\theta)$ che esprime il modulo della velocità della massa in funzione dell'angolo θ **generico**? [Non usate valori numerici!]
   $v(\theta) =$ …………………………………… $(2gL(cos\theta-1/2))^{1/2}$ [dato che l'attrito è trascurabile, si conserva l'energia meccanica: $0 = \Delta E_K + \Delta U_G$. Visto che la massa parte da ferma, è $\Delta E_K = (m/2)v^2(\theta)$. Inoltre, come si può facilmente vedere usando la trigonometria, la differenza tra la quota della massa in corrispondenza a un valore generico di θ e quella iniziale è $\Delta z = - L(cos\theta - cos\theta_0) = - Lcos\theta + L/2$, dove il segno è coerente con il fatto che la quota diminuisce. Dunque $\Delta U_G = -mgLcos\theta + mgL/2$, da cui la soluzione (il segno del radicando è positivo essendo $cos\theta > ½$ - si considera il modulo della velocità!). Notate che il moto **non** è armonico, non essendo la situazione quella delle piccole oscillazioni]
   b) Come si scrive la **funzione** $T(\theta)$ che esprime il modulo della tensione della fune in funzione dell'angolo θ generico? [Non usate valori numerici!]
   $T(\theta) =$ …………………………………… $3mgcos\theta-mg$ [la massa percorre una traiettoria circolare, dato che la fune è inestensibile. Su di essa deve quindi agire un'accelerazione centripeta diretta verso il punto O e di modulo $a_C = v(\theta)^2/L$. Questa accelerazione centripeta è fisicamente determinata dalla sommatoria delle forze che hanno la direzione corretta, che sono la tensione dela fune $T(\theta)$ e la componente nella direzione data della forza peso, che vale $-mgcos\theta$ (il segno negativo è dato dal fatto che questa componente punta verso il basso, dunque ha segno negativo rispetto al verso centripeto). Si ha quindi: $ma_C = mv(\theta)^2/L = T(\theta) - mgcos\theta$. Da qui, usando l'espressione della velocità trovata sopra, la risposta]
   c) Supponendo ora che m = 1.0 kg e L = 0.50 m, quanto vale il modulo massimo T_{MAX} della tensione della fune durante il processo di discesa? [Usate $g = 9.8$ m/s^2]
   $T_{MAX} =$ …………………………………… = ……… N $2mg$ = 20 N [secondo l'espressione scritta in precedenza, il massimo valore della tensione si verifica per $\theta = 0$, cioè quando la massa, passando per la verticale, ha la massima velocità e la componente della forza peso nella direzione della fune è massima. Usando i valori numerici dati nel testo si ottiene la soluzione]

2. Una sottile asta omogenea di lunghezza L = 20 cm e massa m =1.0 kg è imperniata in modo da poter ruotare con attrito trascurabile su un piano verticale. Come rappresentato in figura, il perno (indicato con O) si trova a distanza $L_1 = L/4$ da una delle estremità dell'asta, quella indicata con A. Su questa stessa estremità è agganciata una fune inestensibile di massa trascurabile che dall'altra parte è inchiodata a una parete verticale (la fune è tesa in direzione orizzontale). L'angolo tra asse dell'asta e verticale vale $\theta = \pi/6$ e nelle condizioni descritte l'asta è in **equilibrio**. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità. Ricordate che $sin(\pi/6) = ½$ e $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$]

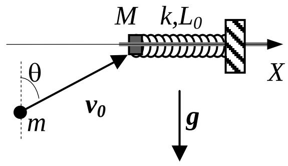


   a) Quanto vale il modulo della tensione T che la fune esercita sull'asta nel punto A? Quanto vale, **in modulo**, la forza F che il perno esercita sul'asta nel punto O?
   $T =$ ……………………….. ~ ……….. N $mgtg\theta \sim 5.7$ N [per l'equilibrio rotazionale dell'asta, la sommatoria dei momenti delle forze rispetto al polo O deve essere nulla. Le uniche forze che agiscono sull'asta hanno braccio non nullo sono la forza peso, applicata nel centro di massa che si trova a distanza $L/2-L/4$ dal perno e di direzione verticale, e la tensione della fune. Queste due forze tendono a far ruotare in verso opposto l'asta e dunque per l'equilibrio è sufficiente uguagliare i moduli dei momenti, che sono dati dal prodotto dei moduli delle forze per i bracci. I bracci, che rappresentano la distanza tra il polo e la retta di applicazione delle forze, valgono rispettivamente $Lcos\theta/4$ e $(L/2-L/4)sin\theta$ per la tensione e la forza peso. Dunque deve essere $TLcos\theta/4 = mgLsin\theta/4$, da cui la risposta]
   $F =$ ……………………….. ~ ……….. N $mg(1+tg^2\theta)^{1/2} = mg/cos\theta \sim 11$ N [per l'equilibrio traslazionale dell'asta occorre che la sommatoria delle forze che su di essa agiscono sia nulla. Tali forze sono la forza peso, diretta verticalmente, la tensione della fune, orizzontale, e la forza $\boldsymbol{F}$ incognita, che dunque deve avere componenti orizzontali e verticali pari (in modulo) alle due forze citate. Poiché tali forze sono ortogonali tra loro, si ha la risposta, dove abbiamo usato l'espressione di T determinata sopra]
   b) Supponete ora che, ad un dato istante, la fune venga improvvisamente tagliata: l'asta prende allora a ruotare nel verso antiorario di figura. Quanto vale, subito dopo il taglio, il modulo dell'accelerazione a_A e a_B dei due estremi A e B dell'asta indicati in figura? [Attenti: si chiede l'accelerazione dei punti A e B, non l'accelerazione angolare…]
   $a_A =$ ……………………….. = …….. m/s^2 $3g/14 = 2.1$ m/s^2 [non essendoci più la fune, l'asta non è più in equilibrio rotazionale e si comincia a muovere con accelerazione angolare $\alpha = \tau/I$. Il momento della forza che ora agisce è solo quello della forza peso, la cui espressione è $\tau = mgLsin\theta/4$. Il momento di inerzia I da considerare è quello di un'asta sottile omogenea imperniata nel punto O. Esso si può facilmente determinare ricordando che $I_{CM} = mL^2/12$ e che il teorema "degli assi paralleli" recita: $I = I_{CM} + md^2$, essendo $d = L/4$ distanza tra gli assi paralleli passanti per il centro di massa (a metà asta) e per il punto O. Si ha $I = mL^2(1/12+1/16) = 7mL^2/48$. Di conseguenza $\alpha = 6g/(7L)$, dove abbiamo anche usato il valore di $sin\theta$

corrispondente alla posizione iniziale $\theta = \pi/6$. A questo punto per determinare l'accelerazione dei due estremi basta ricordare la relazione $a = \alpha R$ tra accelerazione tangenziale (che è quella di tali punti) e accelerazione angolare. In questa espressione R rappresenta la distanza tra polo e estremo considerato, che per l'estremo A vale $L/4$, da cui la soluzione]

a_B = ……………………….. = …….. m/s^2 $9g/14 = 6.3$ m/s^2 [in questo caso $R = 3L/4$, da cui la soluzione]

3. Un manicotto di massa $M = 1.0$ kg è vincolato da una guida (un tondino rigido e fisso su cui è infilato) a muoversi con **attrito trascurabile** in direzione orizzontale (asse X di figura). Al manicotto è saldata una molla di massa trascurabile e costante elastica $k = 4.0$ N/m il cui altro estremo è fissato a una parete rigida verticale. Inizialmente la molla si trova alla propria lunghezza di riposo L_0 e il manicotto è fermo. A un dato istante il manicotto viene colpito da una pallina di massa $m = M/4 = 0.25$ kg che incide sul manicotto avendo una velocità di modulo $v_0 = 3.0$ m/s diretta in direzione obliqua: l'angolo del vettore $\mathbf{v_0}$ rispetto alla verticale vale $\theta = \pi/3$. L'urto tra pallina e manicotto è sicuramente **non anelastico**. In seguito all'urto il manicotto si mette in movimento e la molla viene compressa fino a raggiungere la **massima compressione** $\Delta_{MAX} = 0.20$ m. [State attenti a considerare bene la successione degli eventi: "prima" l'urto e "poi" la compressione della molla…; il dato di L_0 non è noto numericamente, ma questo non dovrebbe creare problemi! Ricordate che $\cos(\pi/3) = ½$ e $\sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$]



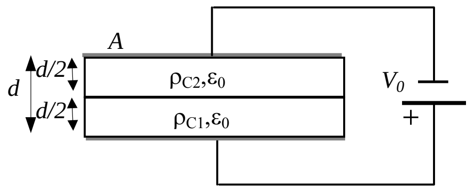
a) Quanto valeva, **subito dopo l'urto**, il modulo della velocità V' del manicotto?

V' = …………………………………… = ……….. m/s $(k/M)^{1/2}\Delta_{MAX} = 0.40$ m/s [nella fase di compressione della molla si conserva l'energia meccanica del manicotto/molla. In questa fase il destino della pallina non influisce sul fenomeno, e dunque la pallina non rientra nella trattazione. La conservazione dell'energia meccanica stabilisce: $0 = \Delta E_K + \Delta U$, con $\Delta E_K = -(M/2)V'^2$ (notate che l'energia cinetica "finale" per questa fase è nulla, essendo il manicotto istantaneamente fermo quando la molla è alla massima compressione). La variazione dell'energia potenziale si deve alla compressione della molla. All'"inizio" della fase considerata la molla è a riposo, dunque la sua **energia** è nulla. Alla "fine" essa vale $(k/2)\Delta_{MAX}^2$. Mettendo tutto insieme e risolvendo si ottiene la soluzione, dove abbiamo scelto il segno positivo dato che la domanda richiedeva il modulo della velocità

b) Quanto valeva, **subito dopo l'urto**, la **componente orizzontale** v'_X della velocità della pallina? [Usate il riferimento cartesiano indicato in figura]

v'_X = …………………………………… = ……….. m/s $v_0/2 - 4V' = -0.10$ m/s [nella breve fase dell'urto la forza elastica e la forza peso non producono effetti (queste forze non sono impulsive), mentre invece la reazione che il tondino esercita sul manicotto, che può essere impulsiva, rende il sistema manicotto/pallina **non isolato** in direzione Y. Il sistema resta però isolato lungo l'asse X, per cui si conserva la quantità di moto totale in questa direzione: $mv_0\cos\theta = mv'_X + MV'$ (notate che non usiamo l'apice per la velocità del manicotto, che può essere solo diretta lungo X). Riscritta tenendo conto della relazione tra le masse e del valore di $\cos\theta$ questa equazione diventa: $v_0/2 = v'_X + 4V'$. Usando il valore di V' determinato alla risposta precedente questa singola equazione fornisce la risposta, dove il segno positivo indica che la pallina si muove verso la sinistra della figura]

4. Un condensatore ad armature piane e parallele è formato da due dischi circolari sottili di materiale ottimo conduttore aventi area $A = 10$ cm^2 affacciati l'un l'altro a distanza $d = 4.0$ mm. Lo spazio fra le due armature è riempito da due cilindri (molto schiacciati!) con base di area coincidente con quelle dei dischi e altezza $d' = d/2 = 2.0$ mm. I due cilindri sono fatti di due diversi materiali **debolmente conduttori**, con resistività rispettivamente $\rho_{C1} = \rho_C = 1.0\text{x}10^5$ ohm m e $\rho_{C2} = 4\rho_C = 4.0\text{x}10^5$ ohm m (la costante dielettrica vale $\varepsilon_0 = 8.8\text{x}10^{-12}$ F/m per tutti e due i materiali). Le armature del condensatore sono collegate a un generatore ideale di differenza di potenziale $V_0 = 1.0\text{x}10^2$ V collegato come in figura (il polo positivo è sull'armatura "inferiore", che è a contatto con il materiale di resistività ρ_{C1}). [Supponete trascurabili gli "effetti ai bordi"]



Vista laterale

a) Quanto vale, in condizioni stazionarie, la potenza P fornita dal generatore?
$P =$ .... = ... W $2AV_0^2/((\rho_{C1}+\rho_{C2})d) = 2AV_0^2/(5\rho_C d) = 1.0\text{x}10^{-2}$ W [in condizioni stazionarie, che si raggiungono dopo che le cariche elettriche si sono depositate sulle varie interfacce (vedi dopo), la potenza del generatore serve solo per "bilanciare" la potenza "dissipata" per effetto Joule, cioè $P = V_0^2/R$. La resistenza elettrica R del sistema si può trovare in modo semplice osservando che la geometria del sistema comporta campi elettrici uniformi nei due materiali e diretti assialmente. I due cilindri debolmente conduttori si comportano allora come la serie di due resistori, con resistenza rispettivamente $R_1 = \rho_{C1}(d/2)/A$ e $R_2 = \rho_{C2}(d/2)/A$. La resistenza complessiva è allora $R = R_1+R_2$, da cui la risposta]

b) Quanto vale, all'**equilibrio**, la carica elettrica Q che si trova (se ci si trova!) **all'interfaccia** tra i due materiali? [Spiegate bene, in brutta, tutti i ragionamenti che seguite!]
$Q =$ .... = ... C $2V_0A\varepsilon_0\ (\rho_{C2}-\rho_{C1})/(d(\rho_{C1}+\rho_{C2})) = 6V_0A\varepsilon_0/(5d) = 2.6\text{x}10^{-10}$ C [nei due cilindri debolmente conduttori passa corrente, dunque al loro interno c'è densità di corrente elettrica che; in linea di principio, potrebbe essere diversa per i due materiali. Dunque potrebbe essere $\boldsymbol{j_1} = \boldsymbol{E_1}/\rho_{C1} \neq \boldsymbol{j_2} = \boldsymbol{E_2}/\rho_{C2}$, tuttavia per la continuità della corrente, essendo i campi elettrici uniformi (all'interno di ogni materiale, affermazione vera se si trascurano gli effetti ai bordi) e diretti lungo l'asse del sistema, deve essere $j_1 = j_2$. La condizione che riguarda la differenza di potenziale implica che $V_0 = |\int \boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{dl}| = E_1d/2 + E_2d/2$, dove abbiamo usato il modulo per non dover discutere sui segni, abbiamo sfruttato direzione e verso dei campi elettrici nei due materiali, e abbiamo notato che tali campi devono essere diversi tra loro dato che la densità di corrente è la stessa ma diverse sono le resistività. A questo punto, avendo stabilito che i campi sono diversi nei due materiali, per trovare la carica che si deposita all'interfaccia occorre applicare Gauss, ad esempio su una scatola a forma di barattolo del tonno, con basi parallele alle due armature e grandi quanto queste e asse verticale, che si trovano nei due materiali diversi. Il flusso del campo elettrico che attraversa questa scatola è dovuto solo alle superfici di base, dato che, trascurando gli effetti ai bordi, i campi sono assiali, cioè verticali. Si ha $\Phi(\boldsymbol{E}) = A(E_2-E_1)$ (state attenti ai segni, che sono diversi essendo diverso il verso del versore uscente dalle due superfici di base!). La carica contenuta in questa scatola è solo quella che si trova all'interfaccia, dato che i campi sono uniformi (nei due materiali) e quindi è nulla la densità di carica volumica al loro interno, cioè è proprio la Q che si sta cercando. Unendo tutte le informazioni trovate, cioè mettendo a sistema le tre equazioni che ne vengono fuori, si ottiene la soluzione]

c) Quanto valgono e che direzioni e verso hanno i campo magnetici $\boldsymbol{B_1}(r)$ e $\boldsymbol{B_2}(r)$ che si misurano **all'interno** dei due materiali ad una distanza r generica dall'asse del condensatore (la congiungente i centri dei due dischi)? [Supponete condizioni **stazionarie**; dato che dovete scrivere funzioni della variabile generica r, con r minore del raggio dei cilindri, **non** usate valori numerici per questa risposta, indicando i parametri **noti** del problema con la loro espressione letterale. Usate μ_0 per la permeabilità magnetica dei materiali, equivalente a quella del vuoto]
Direzione e verso: .... all'interno dei materiali passa, come detto, una corrente elettrica. La situazione non è troppo diversa da quella che si ha quando un filo elettrico è percorso da corrente (qui si è, in realtà, all'interno del filo, ma direzione e verso non cambiano). Quindi, facendo riferimento ad un sistema cilindrico con asse coincidente con l'asse del sistema, la direzione è tangenziale e il verso è quello dato dalla regola del ciao ciao, con il pollicione diretto come la corrente (che va dal basso all'alto rispetto alla figura)
$B_1(r) =$....................................... $V_0r/(\mu_0d(\rho_{C1}+\rho_{C2}))$ [visto che la geometria del sistema consente di stabilire che i campi magnetici hanno direzione tangenziale, si può utilizzare il teorema di Ampere eseguendo la circuitazione su una circonferenza parallela alle armature e di raggio generico r (ovviamente tale circonferenza è concentrica al sistema). La circuitazione si esprime $B_{1,2}2\pi r$. Per usare il teorema di Ampere occorre individuare la corrente concatenata a tale circonferenza (notate che, sulla base della domanda, la circonferenza è sempre interna al sistema). Essa è evidentemente data dal flusso della densità di corrente calcolato sulla superficie (circolare) delimitata dalla circonferenza stessa. Poiché, come già osservato, la densità di corrente è assiale e uniforme (in **tutto** il sistema), il flusso non è altro che il prodotto del modulo di j per la superficie del cerchio, cioè $j\pi r^2$. Il modulo della densità di corrente si trova agevolmente seguendo il ragionamento esposto per rispondere al quesito precedente: si ha $j = 2V_0/(d(\rho_{c1}+\rho_{c2}))$, da cui la soluzione. Notate che, come ovvio a causa dell'uniformità della densità di corrente, il campo magnetico misurato nei due materiali (purché ci si trovi alla stessa distanza dall'asse) è lo stesso]V_0
$B_2(r) =$ .... $B_1(r)$ [vedi sopra]

-- *TERMODINAMICA (opzionale)*

Una certa quantità (incognita) di Elio, un gas monoatomico che può essere considerato perfetto, partecipa ad un ciclo termico composto dalla sequenza di trasformazioni **reversibili**: compressione isoterma A → B, compressione isobara B → C, espansione isoterma C → D, compressione adiabatica D → A. I dati noti del ciclo sono: $V_A = 9.00$ litri, $V_B = 2V_A/3$ e $V_C = V_B/4$. Si sa inoltre che l'espansione isoterma C → D avviene mantenendo il gas a contatto termico con un termostato costituito da un'enorme massa di acqua e ghiaccio fondente mescolati ed in equilibrio termico fra loro. [Usate $R = 8.31$ J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]

a) Quanto vale il volume V_D occupato dal gas nel punto D del ciclo?
$V_D =$ .... = ... m^3 $V_A(T_A/T_D)^{1/(\gamma-1)} = V_A(T_B/T_D)^{1/(\gamma-1)} = V_A((T_DV_B/V_C)/T_D)^{1/(\gamma-1)} = V_A(V_B/V_C)^{3/2} = 8V_A = 8.00\text{x}10^{-2}$ m^3 [si usano le leggi di isobara e adiabatica reversibile, notando che $T_A = T_B$ e $T_C = T_D$ e che, per un gas perfetto monoatomico, è $\gamma = c_P/c_V = 5/3$]

b) Sapendo che nell'espansione isoterma C $\rightarrow$ D viene solidificata una massa m = 100 g di acqua (calore latente di fusione del ghiaccio $\lambda_F = 3.33\mathrm{x}10^5$ J/kg), quanto vale il numero di moli n del gas Elio che partecipa alla trasformazione? [Può farvi comodo sapere che $ln(48) \sim 3.87$]

n = …………………………………… ~ …….. moli $m\,\lambda_F/(RT_F ln(V_D/V_C)) \sim 3.79$ moli [il calore ceduto dal gas nell'espansione serve per far passare alla fase solida la massa m d'acqua, operazione che richiede una quantità $Q = m\lambda_F$ di calore; si noti che la trasformazione avviene, come stabilito nel testo, mantenendo il gas alla temperatura di fusione dell'acqua T_F = 273 K]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 21/2/2013 Firma: