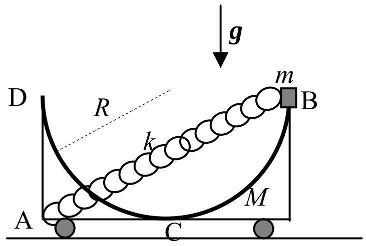
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE – 13/6/2013

Nome e cognome: ………………………………………………………   Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Una guida (un tondino rigido), che ha la forma di una semicirconferenza di raggio R = 50 cm che giace su un piano verticale, è montata su un carrello di massa M = 4.0 kg (si intende massa totale del carrello e della guida). Sulla guida è infilato un manicotto (**puntiforme**) di massa $m = M/4$ = 1.0 kg vincolato a una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 4.0 N/m e lunghezza di riposo **trascurabile** il cui altro estremo è fissato a un'estremità del carrello (punto A di figura). Il manicotto può scorrere sulla guida con attrito **trascurabile** e il carrello può muoversi su una strada orizzontale con attrito **trascurabile**. Inizialmente manicotto e carrello sono entrambi fermi e il manicotto si trova al punto più "alto" della guida (punto B di figura), da cui a un certo instante viene lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; fate attenzione che il sistema proposto probabilmente non è realizzabile nella forma descritta in figura, ma supponete che esso sia davvero fattibile]



a) Quanto valgono, in **modulo**, le velocità v' e V' rispettivamente del manicotto e del carrello nell'istante in cui il manicotto passa per il punto più "basso" della guida, cioè per il punto C di figura? [Tenete conto che sia il manicotto che il carrello si muovono e utilizzate per bene, con **debita spiegazione in brutta**, i concetti di conservazione delle grandezze meccaniche dei sistemi]

v'= …………………………………… ~ ……….. m/s $(2R(g+2(k/m)R)/(1+m/M))^{1/2}$ ~ 3.3 m/s [sul sistema non agiscono forze dissipative che producano lavoro e dunque si conserva l'energia meccanica complessiva. Inoltre il sistema è isolato in direzione orizzontale (asse X), dato che non ci sono forze esterne lungo tale direzione. Pertanto si conserva la quantità di moto totale in questa direzione. Cominciamo con il lavorare su quest'ultima espressione: $mv_X+MV = 0$, dove abbiamo notato che il carrello si può muovere solo lungo la direzione orizzontale (per cui non mettiamo alcun pedice a V) e abbiamo osservato che la quantità di moto iniziale è nulla essendo tutto fermo. Si ottiene dunque: $V = -(m/M)v_x$, dove il segno negativo indica che le velocità dono orientate in versi opposti. La conservazione dell'energia meccanica si scrive: $0 = \Delta E_K + \Delta U$, dove l'energia cinetica è quella (sommata) del carrello e del manicotto, cioè, partendo gli oggetti da fermi: $\Delta E_K = (m/2)v^2+(M/2)V^2$. La variazione di energia potenziale si deve agli effetti (sommati) della forza peso e della forza elastica, cioè $\Delta U = \Delta U_G+\Delta U_{ELA}$. Detta Δh la variazione di quota del manicotto, si ha $\Delta U_G = -mg\Delta h$, dove il segno è corretto se Δh è espresso in valore assoluto. La variazione di energia elastica della molla si scrive invece: $\Delta U_{ELA} = (k/2)(L^2-L^2_{INI})$ dove L e L_{INI} rappresentano le lunghezze della molla all'istante iniziale e a quello considerato come "finale". Le relazioni scritte valgono infatti in qualsiasi istante del processo. Per l'istante considerato, si ha $v_X = v$, dato che il manicotto, nel punto più in basso della guida, si trova su un tratto orizzontale e nulla è la velocità in direzione verticale. Inoltre $\Delta h = R$ per ovvi motivi geometrici e $L = R$. Infine si ha anche $L_{INI} = (4R^2+R^2)^{1/2} = 5^{1/2}R$, dove abbiamo applicato il teorema di Pitagora, per cui $\Delta U_{ELA} = (k/2)(R^2-5R^2)=-2kR^2$. Mettendo tutto insieme si ottiene la soluzione]

V'= …………………………………… ~ ……….. m/s $(m/M)v'$ ~ 0.83 m/s   [vedi sopra; il segno scompare essendo richiesto il modulo]

b) Quanto vale, **in modulo**, la forza di reazione vincolare F esercitata dalla guida sul manicotto nell'istante in cui esso passa per il punto C?

F= …………………………………… ~ ……….. N $mv'^2/R + mg$ ~ 32 N   [il manicotto sta compiendo un moto con traiettoria circolare. Dunque esso deve risentire di un'accelerazione centripeta di modulo $a_C = v'^2/R$. Le forze che agiscono sul manicotto in direzione radiale, che all'istante considerato coincide con la direzione verticale, sono il peso e la forza $\mathbf{F}$ della guida. Scegliendo come verso positivo quello centripeto (dunque quello orientato verso l'alto), deve essere: $v'^2/R = F/m - g$, da cui la risposta]

c) Quanto vale lo spostamento ΔX che **il carrello** compie mentre il manicotto scende fino al punto A della guida? [Per il segno, usate un riferimento orizzontale orientato verso la **sinistra** di figura]

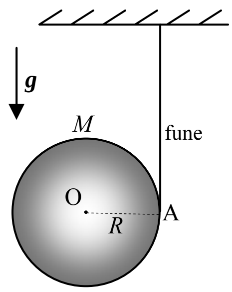
ΔX= …………………………………… = ……… m $-mR/(M+m)$ = 0.10 m   [l'accelerazione $a_{CM,X}$ del centro di massa del **sistema** manicotto + carrello **lungo la direzione orizzontale** è nulla essendo il sistema isolato in questa direzione. Inoltre la velocità iniziale del centro di massa è nulla e quindi il centro di massa non si sposta in direzione X. Di conseguenza $0 = \Delta x_{CM} =(M\Delta X + m\Delta x)/(M+m)$, dove Δx rappresenta lo spostamento orizzontale del manicotto **misurato rispetto alla strada** (questo è necessario perché la conservazione della quantità di moto, ovvero l'equazione del moto del centro di massa, deve essere scritta rispetto allo stesso riferimento per tutti gli oggetti considerati). Tenendo conto della composizione degli spostamenti, si ha $\Delta x = \Delta x' + \Delta X$, dove $\Delta x'$ è lo spostamento in direzione orizzontale del manicotto **rispetto al carrello**. Tale spostamento vale $\Delta x' = R$, da cui, mettendo tutto assieme, la risposta, dove il segno negativo indica che lo spostamento avviene verso la destra della figura]

d) Quanto valgono, in **modulo**, le velocità v'' e V'' rispettivamente del manicotto e del carrello nell'istante in cui il manicotto passa per la posizione D di figura? [La posizione D si trova al punto più "alto" della guida dalla parte opposta rispetto al punto di partenza e non è affatto detto che il manicotto vi si soffermi (quello che succede dopo non vogliamo saperlo…)! Per la risposta state molto attenti a considerare per bene le componenti delle velocità e **spiegate per bene in brutta** come procedete]

V''= …………………………………… = ……… m/s 0   [valgono le conservazioni nella forma scritta per la risposta al punto a). Notiamo però che nell'istante considerato il manicotto, muovendosi in direzione verticale **rispetto alla guida**, ovvero al carrello, ha componente orizzontale della sua velocità pari a quella del carrello, cioè $v_X'' = V''$. Dovendo valere anche la conservazione della quantità di moto, deve necessariamente essere $V'' = 0$]

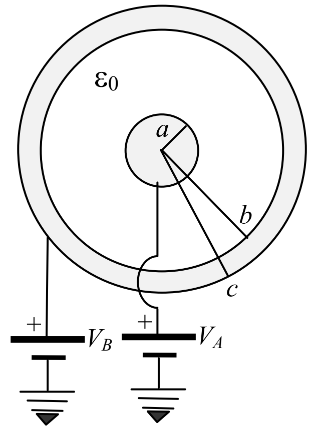
v''= …………………………………… = ……… m/s $2(k/m)^{1/2}R$ = 2.0 m/s   [nella differenza di energia cinetica (da inserire nella conservazione dell'energia meccanica) resta solo il termine $\Delta E_K = (m/2)v''^2$, dato che il carrello, come osservato, deve essere fermo. Inoltre nella posizione considerata si ha $\Delta U_G = 0$, mentre $\Delta U_{ELA} = (k/2)(R^2-5R^2)=-2kR^2$, come per il caso precedente. Mettendo tutto insieme si ottiene la soluzione. Osservate che il manicotto **non** si ferma affatto nella posizione D: poi proseguirà il suo moto chissà come, ma questo non viene richiesto!]

2. Un cilindro **disomogeneo** di massa $M = 0.30$ kg e raggio $R = 10$ cm è costruito in modo da presentare una densità di massa che varia con la distanza dall'asse r secondo la legge $\rho_m(r) = Ar^2$, con A costante **incognita** opportunamente dimensionata.
   a) Quanto vale il momento di inerzia I del cilindro per rotazioni attorno al suo asse geometrico? [Se non sapete rispondere a questa domanda passate senza indugio alle successive, lasciando il momento di inerzia indicato con la lettera I]
   I = ……………………….. = ………. kg m^2 $2MR^2/3 = 2.0\text{x}10^{-3}$ kg m^2 [per definizione è $I = \int r^2 dm$, dove l'integrale è esteso all'intera massa del cilindro. Inoltre è anche $M = \int dm$. L'oggetto considerato ha ovviamente simmetria cilindrica, dato che la densità di massa dichiaratamente varia solo con la distanza dall'asse (coordinata radiale del sistema di riferimento cilindrico), per cui l'elemento di massa si può scrivere $dm = \rho_m dV = \rho_m 2\pi rhdr = 2\pi Ar^3 hdr$, con h altezza del cilindro (incognita come A!). Si ha quindi, usando i debiti estremi di integrazione: $I = 2\pi Ah\int_0^R r^5 dr$ e $M = 2\pi Ah\int_0^R r^3 dr$. Questi integrali si sanno fare facilmente (spero!), conducendo a $I = 4\pi AhR^7/7$ e $M = 4\pi AhR^5/5$. Mettendo insieme le due espressioni si ottiene la soluzione]
   b) Immaginate ora che attorno alla superficie laterale del cilindro sia stata avvolta una fune inestensibile di massa trascurabile, il cui estremo libero è fissato a un solaio fisso e rigido come schematizzato in figura. Il cilindro è così libero di scendere verso il basso mentre la fune di srotola, con un movimento roto-traslatorio che è, tanto per capirsi, quello di uno yo-yo (gioco amato da noi vecchietti quando eravamo bimbi…). Quanto vale il modulo della tensione T che la fune esercita sul cilindro? [Immaginate che la tensione agisca sempre sul punto A di figura e che la fune, ovviamente, non slitti sulla superficie laterale del cilindro su cui è avvolta; inoltre trascurate ogni forma di attrito]



   T = ……………………….. = ………. N $Mg/(MR^2/I+1) = Mg/(3/2+1) = 2Mg/5 = 1.2$ N
   [il cilindro ruota attorno al proprio asse e il suo centro di massa trasla verticalmente verso il basso. Considerando come polo di rotazione il punto O (centro di massa del cilindro) e usando un asse verticale orientato verso il basso, le equazioni del moto recitano: $a_{CM} = g\text{-}T/M$ e $\alpha = TR/I$, dove abbiamo notato che l'unica forza che fa momento rispetto al polo considerato è la tensione della fune. Sostituendo l'espressione del momento di inerzia trovata sopra si ha $\alpha = 3T/(2MR)$. Dato che la fune non slitta sulla superficie laterale del cilindro, si ha anche $a_{CM} = \alpha/R$. Con questa equazione si ottiene un sistema di tre equazioni e tre incognite che, risolto per l'incognita T, fornisce la soluzione. Notate che la tensione della fune è costante e minore in modulo della forza peso Mg. Osservate poi che allo stesso risultato si poteva arrivare considerando il moto del cilindro come di sola rotazione rispetto al polo, istantaneamente fisso, A. In questo caso l'unica equazione del moto sarebbe stata $\alpha = MgR/I'$, con $I' = I+MR^2 = 5MR^2/3$ per il teorema degli assi paralleli (la rotazione avviene attorno a un asse parallelo a quello passante per il centro di massa). Dall'equazione esce un'accelerazione angolare $\alpha = 3g/(5R)$, da cui $a_{CM} = \alpha R = 3g/5 = g\text{-}T/M$, e quindi .$T = 2Mg/5$]
   c) Supponendo che il cilindro parta da fermo da una certa quota, quanto vale la velocità v_{CM} del suo centro di massa quando questo è sceso per un tratto $\Delta h = 50$ cm?
   v_{CM} = ……………………….. ~ …….. m/s $(2g\Delta h/(1+I/(MR^2)))^{1/2} = (6g\Delta h/5)^{1/2} \sim 2.4$ m/s [non essendoci forze dissipative che fanno lavoro si conserva l'energia meccanica: $0 = \Delta E_K + \Delta U$. La variazione di energia potenziale è dovuta alla forza peso e si esprime $\Delta U = -Mg\Delta L$ (il segno negativo indica che essa diminuisce, poiché il centro di massa si abbassa). La variazione di energia cinetica può essere espressa con un termine dovuto alla traslazione, $Mv_{CM}^2/2$, sommato a uno dovuto alla rotazione, $I\omega^2/2$. Poiché la fune non slitta sulla superficie del cilindro si ha $\omega = v_{CM}/R$. Mettendo tutto assieme e usando l'espressione di I trovata sopra si ottiene la soluzione]
   d) Immaginate ora che, subito dopo che il centro di massa è sceso per il tratto Δh, la fune si stacchi improvvisamente dal solaio. Quanto vale la velocità angolare ω del cilindro dopo che il suo centro di massa è sceso per un ulteriore tratto Δh = 50 cm?
   ω = ……………………….. ~ …….. rad/s $v_{CM}/R \sim 24$ rad/s [dopo il distacco della fune non ci sono più forze in grado di produrre momento rispetto al centro del cilindro. Dunque non c'è più accelerazione angolare e pertanto la velocità angolare non cambia, rimanendo pari al valore che aveva subito prima del distacco. Questo valore corrisponde alla velocità del centro di massa calcolata in precedenza attraverso la relazione geometrica $\omega = v_{CM}/R$, con v_{CM} calcolato sopra]

3. Una sfera piena di raggio a = 10 cm, fatta di materiale ottimo **conduttore** omogeneo, è circondata da un guscio sferico spesso, con raggio interno b = 40 cm e raggio esterno c = 50 cm, concentrico alla sfera e fatto anch'esso di materiale ottimo **conduttore** omogeneo. Lo spazio tra sfera e guscio, cioè il volume compreso tra $r = a$ e $r = b$, è vuoto. Come rappresentato in figura, la sfera è collegata al polo positivo di un generatore di differenza di potenziale $V_A = 3.0\text{x}10^2$ V, il cui altro polo è collegato a terra, mentre il guscio è collegato al polo positivo di un generatore di differenza di potenziale $V_B = 9.0\text{x}10^2$ V, il cui altro polo è anche collegato a terra; considerate il sistema in condizioni di **equilibrio**. [Usate ε_0 = $8.8\text{x}10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto]



   a) Detta Q_a la carica che si trova sulla superficie della sfera piena (cioè al raggio $r = a$), come si esprimono le cariche Q_b e Q_c che si trovano sulle superfici interna ed esterna del guscio (cioè ai raggi rispettivamente $r = b$ e $r = c$)? [Lasciate per il momento incognita la carica Q_a, per calcolarla al punto seguente. Qui usate espressioni letterali, senza valori numerici. Spiegate **per bene**, in brutta, il procedimento adottato]

$Q_b =$ …………………………… $-Q_a$ [all'equilibrio il guscio sferico è equipotenziale e dunque non c'è campo elettrico per $b < r < c$. Applicando il teorema di Gauss a una scatola sferica di raggio $b < r < c$ si trova che la carica al suo interno, pari a $Q_a + Q_b$, deve essere nulla, da cui la risposta]

$Q_c =$ …………………………… $4\pi\varepsilon_0 c V_B$ [la differenza di potenziale tra c e un punto posto a grandissima distanza (all'"infinito") è $\Delta V = -V_B = -\int_c^\infty E(r)dr$, dove il segno negativo al potenziale V_B tiene conto del fatto che il guscio si trova a potenziale superiore rispetto alla terra, dunque all'infinito, e si è assunto campo radiale, come da simmetria. Dato che le cariche Q_a e Q_b hanno somma nulla, il campo all'esterno del sistema si esprime come: $E(r) = Q_c/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, da cui, svolgendo l'integrale, la soluzione]

b) Quanto vale Q_a?

$Q_a =$ …………………………… = …… C $4\pi\varepsilon_0 ab(V_B-V_A)/(a-b) = -8.8\text{x}10^{-9}$ C [la differenza di potenziale tra a e b è $\Delta V = V_B - V_A$. Infatti V_B e V_A sono le differenze di potenziale dei punti collocati a raggio rispettivamente a e b rispetto a un riferimento comune, la terra. Deve dunque essere $\Delta V = V_B - V_A = -\int_a^b E(r)dr$. Il campo elettrico tra a e b è determinato solo dalla carica Q_a secondo la $E(r) = Q_a/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$. Svolgendo l'integrale si trova la soluzione dove il segno negativo non deve stupirvi, essendo il potenziale in b maggiore di quello in a]

c) Immaginate ora che all'istante $t_0 = 0$ il generatore V_B venga improvvisamente sostituito con una resistenza $R = 10$ Mohm (dunque per $t < t_0$ il sistema è quello descritto in precedenza, mentre per $t > t_0$ c'è una resistenza R tra **il guscio sferico e la terra**). Come si esprime in funzione del tempo t l'intensità di corrente $I(t)$ che scorre nella resistenza? [Dovete scrivere una funzione del tempo t; non usate valori numerici; spiegate **per bene**, in brutta, cosa succede]

$I(t) =$ ……………………………$(Q_c/(RC_B))\exp(-t/RC_B)$, con Q_c determinato sopra e $C_B = Q_c/V_B$ [poiché non c'è collegamento elettrico tra la sfera e il guscio, gli effetti riguardano solo la carica del guscio. Più precisamente, dato che si può ragionevolmente supporre che le condizioni di equilibrio nel conduttore (ottimo) del guscio siano sempre verificate, gli effetti riguardano solo la carica Q_c inizialmente presente sulla superficie esterna del guscio. Infatti questa superficie costituisce un condensatore, il quale si trova a "scaricarsi" verso terra attraverso la resistenza R con un andamento temporale esponenziale decrescente, con costante tempo $\tau = RC_B$. C_B è la capacità del condensatore costituito dal guscio esterno, che vale, come si può facilmente dimostrare (basta prendere l'espressione di Q_c determinata prima e dividerla per V_B) $C_B = 4\pi\varepsilon_0 c$. Per vostra curiosità, osservate che $\tau = 55$ μs, un tempo piuttosto rapido. Da qui la soluzione, dove si è anche tenuto presente che la condizione iniziale, a $t = t_0 = 0$, è che il condensatore possiede la carica Q_c determinata prima, per cui l'intensità di corrente iniziale è $Q_c/(RC_B)$]

d) Quanto vale il lavoro L_A fatto dal generatore V_A in un lunghissimo (idealmente "infinito") periodo di tempo successivo a $t_0 = 0$?

$L_A =$ …………………………… = ……….. J $(V_B/2)(2V_A-V_B)(4\pi\varepsilon_0 ab/(b-a)) = -2.0\text{x}10^{-6}$ J [il generatore V_A ha come missione quella di portare e mantenere la sfera di raggio a al potenziale V_A rispetto a terra. A tale scopo esso invia la giusta quantità di carica sulla sfera. Se si aspetta un tempo molto lungo, corrispondente a nuove condizioni di equilibrio, il guscio si trova a potenziale nullo. Dunque la carica elettrica che, dopo tanto tempo, si troverà sulla sfera tenderà a $Q_a' = 4\pi\varepsilon_0 ab(0-V_A)/(a-b)$. Per il calcolo del lavoro fatto dal generatore, conviene considerare che $L_A = \Delta U_E$, dove ΔU_E è la variazione di energia accumulata dal **condensatore** costituito dalla sfera piena e dalla superficie interna del guscio. La capacità di questo condensatore si trova facilmente (è un banale condensatore sferico) dividendo per esempio l'espressione di Q_a' per $-V_A$ (il segno, al solito, è dovuto al fatto che l'armatura "esterna" si trova a potenziale minore di quella "interna"). Si ottiene $C_A = 4\pi\varepsilon_0 ab/(b-a)$. A questo punto basta ricordare che, per un condensatore di capacità C che ha una carica Q, l'**energia** immagazzinata nel campo è $U_E = Q^2/(2C)$. Dunque $\Delta U_E = (1/(2C_A)(Q'^2_a-Q_a^2) = (1/2)(4\pi\varepsilon_0 ab/(b-a))(V_A^2-(V_B-V_A)^2)$. Svolgendo i calcoli si trova la risposta, dove il segno negativo indica che l'energia del condensatore C_A diminuisce, diminuendo la carica che vi è accumulata]

== Termodinamica (opzionale/anni precedenti)

Un recipiente dotato di pareti rigide, indeformabili e **impermeabili al calore**, ha volume $V = 1.00$ l. Al suo interno può scorrere con attrito trascurabile un setto di spessore e massa trascurabili che divide il recipiente in due camere, A e B, contenenti rispettivamente n_A e n_B moli di un gas monoatomico che può essere considerato perfetto. Il setto scorre in direzione orizzontale ed è anch'esso realizzato con materiale **impermeabile al calore**. Si sa che $n_B = 2n$ e $n_A = n$ e che, ovviamente, $V = V_A+V_B$. Inoltre si osserva che, inizialmente, il sistema è in equilibrio con $V_A = V_B$ e $T_A = 500$ K. [Usate $R = 8.31$ J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]

a) Quanto vale la temperatura T_B del gas che si trova nella camera B?

$T_B =$ ……………………………………………. = ……………… K $T_A/2 = 250$ K [essendo il sistema in equilibrio, si ha $P_A = P_B$, da cui $(n_A RT_A)/V_A = (n_B RT_B)/V_B$. Tenendo conto che $V_A=V_B$ e usando la relazione tra le moli data nel testo si ottiene la soluzione]

b) Supponete ora che un apposito dispositivo fornisca al (solo) gas presente nella camera A una certa quantità di calore Q_A (incognita). A seguito di questa cessione di calore, si osserva che il gas nella camera A si espande e il setto si sposta finché non viene raggiunta una nuova condizione di equilibrio in cui $V_A'=3V/4$. Il processo avviene in maniera quasi-statica, cioè in condizioni che si possono ritenere **reversibili**. Sapendo che $n_A = 0.100$ moli, quanto vale il calore Q_A?

$Q_A =$ ……………………………………………. = ……………… J $(3R/2)n_A T_A(2^{5/3}-1+2^{1/3} \ -1/2) \sim 2.93(3R/2)n_A T_A = 1.83\text{x}10^3$ J [iniziamo con il notare che, per il primo principio della termodinamica, deve essere $Q_A=L_A+\Delta U_A$ e $0=L_B+\Delta U_B$, dove nell'ultima espressione abbiamo notato che il gas B subisce una trasformazione adiabatica. Inoltre, dato che A si espande e B si comprime, deve essere $L_A+L_B = 0$. Sommando tra di loro le espressioni per il primo principio in A e in B si ottiene quindi: $Q_A=\Delta U_A+\Delta U_B = n_A c_V(T_A'-T_A+2T_B'-2T_B)$, dove si è sfruttata la relazione tra il numero di moli data nel testo. Come già affermato, il gas B subisce una trasformazione adiabatica che, sulla base di quanto affermato nel testo, può essere considerata reversibile. Dunque deve essere $T_B'=T_B(V_B/V_B')^{\gamma-1}= T_B 2^{2/3}$, dove si è usata la legge delle adiabatiche reversibili e si è tenuto conto che $V_B'=V-V_A'=V/4$ e che, per un gas perfetto monoatomico, $\gamma=c_P/c_V=5/3$. Si ottiene quindi $Q_A=n_A c_V(T_A'-T_A+(T_A/2)(2^{2/3}-1))$, dove abbiamo usato la relazione, trovata sopra, $T_B=T_A/2$. Per determinare la soluzione occorre esprimere T_A'. A questo scopo notiamo che la nuova condizione di equilibrio richiede $P_A'=n_A RT_A'= P_B'$. D'altra parte, essendo la trasformazione in B un'adiabatica reversibile, è $P_B'=P_B(V_B/V_B')^{\gamma}=P_A 2^{5/3}=n_A RT_A 2^{5/3}$, da cui $T_A'=T_A 2^{5/3}$. Da qui, rimettendo tutto insieme, si ottiene la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 13/6/2013 Firma: