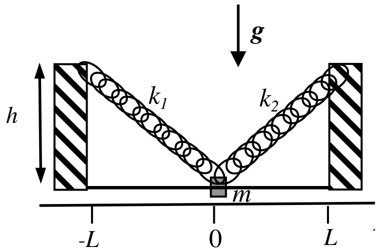
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE – 3/7/2013

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un manicotto (puntiforme!) di massa $m = 0.30$ kg può scorrere con attrito trascurabile lungo una guida costituita da un tondino rigido e fisso disposto in posizione orizzontale (asse X). Detto $x = 0$ il punto di mezzo di questo tondino, nelle posizioni $x = L$ e $x = -L$, con $L = 60$ cm, si ergono (!) due muretti verticali ai quali, a un'altezza $h = L = 60$ cm, sono vincolati gli estremi di due molle di massa trascurabile il cui altro estremo è agganciato al manicotto (guardate la figura!). Le due molle hanno entrambe lunghezza di riposo trascurabile, ma costante elastica differente; in particolare si ha $k_1 = 1.0$ N/m e $k_2 = 2k_1 = 2.0$ N/m. [Fate attenzione a considerare in modo corretto la geometria del sistema!]



Nota: il disegno si riferisce a una posizione generica!

a) Come si scrive l'equazione del moto del manicotto $a(x)$? [Dovete scrivere una **funzione** che esprime l'accelerazione del manicotto quando questo si trova in una posizione generica x rispetto all'asse X citato sopra, centrato nel punto di mezzo del tondino e diretto verso la destra di figura. Non usate valori numerici, ma fate riferimento ai parametri noti del problema attraverso le loro espressioni letterali]

$a(x) =$ ………………………………………. $-(k_1/m)(L+x)+(k_2/m)(L-x) = -((k_1+k_2)/m)x +((k_2-k_1)/m)L$ [il manicotto è vincolato a muoversi lungo l'asse X , per cui occorre considerare le sole forze che hanno componenti orizzontali. Tali forze sono le **componenti orizzontali** delle forze elastiche prodotte dalle due molle. Detta x la posizione generica del manicotto (puntiforme!), la molla 1 ha per il teorema di Pitagora lunghezza $L_1 = (L^2+(L+x)^2)^{1/2}$. Il **modulo** della forza da essa esercitata è k_1L_1 (la lunghezza di riposo è trascurabile) e la componente orizzontale si ottiene per la goniometria moltiplicando tale modulo per $(L+x)/L_1$. Si ha quindi: $|F_{1X}| = k_1(L+x)$. Si può facilmente verificare che per l'altra molla si ha $|F_{2X}| = k_2(L-x)$. Per quanto riguarda i segni, essendo tutte e due le molle sempre estese rispetto alla lunghezza di riposo (che è trascurabile), la molla 1 tende a far muovere il manicotto verso sinistra (dunque compare con un segno negativo) e la molla 2 verso destra (dunque con segno positivo), da cui la risposta]

b) Quanto vale la posizione di equilibrio x_{EQ}? [Dovete esprimerla rispetto all'asse X citato sopra, centrato nel punto di mezzo del tondino e diretto verso la destra di figura]

$x_{EQ} =$ …………………………………… = ……….. m $(k_2-k_1)L/(k_2+k_1) = L/3 = 0.20$ m [la posizione di equilibrio è quella in cui $a(x_{EQ}) = 0$, da cui, tenendo conto dell'equazione del moto scritta sopra, la soluzione]

c) Supponete ora che, mentre il manicotto se ne sta **fermo** e tranquillo nella posizione di equilibrio, su di esso arrivi un altro manicotto, della stessa massa m e dotato di velocità **orizzontale** v_0 incognita, diretta verso la sinistra della figura (dunque la sua componente è negativa). In seguito all'urto fra i due manicotti, che può essere considerato perfettamente **elastico**, il manicotto "originale" (quello attaccato alle molle) prende a muoversi verso la sinistra di figura per fermarsi "istantaneamente" nella posizione $x' = 0$. Quanto valeva v_0? [Spiegate per benino, in brutta, **tutti** i passaggi che vi conducono alla soluzione!]

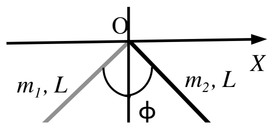
$v_0 =$ …………………………………… ~ ……….. m/s $-L\ ((k_2-k_1)^2/(m(k_2+k_1))^{1/2} = -L(k_1/(3m))^{1/2} \sim -0.63$ m/s [in seguito all'urto, che è un processo molto breve, il manicotto acquista una velocità v' che lo mette in movimento finché non viene raggiunta la posizione x' nella quale si verifica l'arresto (istantaneo, cioè dopo l'istante considerato il manicotto non sta necessariamente fermo, anzi, non ci sta proprio!). Per il calcolo di v' occorre considerare la conservazione dell'energia cinetica del sistema dei due manicotti, dovuta alla definizione di urto elastico, e la conservazione della quantità di moto totale, ovvero della sua componente orizzontale. Infatti nel breve periodo dell'urto sul sistema non agiscono forze esterne di carattere impulsivo (non sono impulsive le forze elastiche e le loro componenti). Si ha quindi: $(m/2)(v_0^2) = (m/2)(v'^2+v''^2)$, dove v'' indica la velocità del manicotto proiettile subito dopo l'urto. Inoltre deve anche essere: $mv_0 = m(v'+v'')$. Si ricava quindi $v'' = v_0-v'$, che, sostituita nella conservazione dell'energia cinetica, porta a $v_0^2 = 2v'^2+v_0^2-2v_0v'$, ovvero $v'=v_0$ (abbiamo fatto una lunga dimostrazione per quello che tutti, o quasi, sanno o possono verificare facendo urtare due monete identiche, cioè che, se le masse sono uguali, due oggetti si "scambiano" le velocità in un urto elastico, per cui il manicotto prende a muoversi con la velocità v_0. Occhio, però: nella soluzione era necessario spiegare **tutti** i passaggi…). Dunque il manicotto parte verso sinistra con velocità pari a v_0 per fermarsi nella posizione $x' = 0$. In questa fase si conserva l'energia meccanica, dato che gli attriti sono trascurabili. Ricordando che l'energia elastica di una molla si esprime come $(k/2)\Delta^2$, con Δ allungamento della molla rispetto alla lunghezza di riposo, che in questo caso coincide con la lunghezza effettiva della molla, si ha: $(m/2)v_0^2 + (k_1/2)L_1^2+(k_2/2)L_2^2 = (k_1/2)L_{fin}^2 + (k_2/2)L_{fin}^2$, dove la lunghezza delle molle nella configurazione iniziale, cioè con il manicotto nella posizione di equilibrio, è $L_1^2 = ((L+x_{EQ})^2+L^2)$ e $L_2 = ((L-x_{EQ})^2+L^2)$ (vedi sopra) mentre nella configurazione finale essa vale per tutte e due le molle $L_{fin} = (L^2+L^2)^{1/2} = 2^{1/2}L$ (Pitagora!). Mettendo tutto insieme e facendo un po' di algebra, magari sfruttando la posizione $x_{EQ} = L/3$ trovata sopra, si ottiene la risposta, dove il segno negativo tiene conto del verso della velocità]

d) Quanto vale l'intervallo di tempo Δt tra l'istante dell'urto e quello in cui il manicotto arriva (per la prima volta) nella posizione $x' = 0$ considerata sopra? [Spiegate e calcolate tutto per bene!]

$\Delta t =$ …………………………………… ~ ……… s $\pi(m/(k_1+k_2))^{1/2}/2 \sim 0.50$ s [l'equazione del moto trovata sopra evidenzia che il moto del manicotto è armonico. Infatti essa è della forma dell'equazione del moto armonico. La pulsazione di questo moto vale $\omega = ((k_1+k_2)/m)^{1/2}$. Per effetto dell'urto, il manicotto si mette in movimento dalla posizione di equilibrio per raggiungere un punto estremo del suo moto armonico (infatti istantaneamente la velocità è nulla – il moto sta cambiando di verso!). Come si può facilmente dimostrare, il tempo necessario a questo scopo è $T/4$, con $T = 2\pi/\omega$, da cui la risposta]

2. Una squadretta è costruita saldando assieme gli estremi di due aste sottili e omogenee in modo tale che l'angolo compreso tra gli assi delle asticelle sia retto ($\phi = \pi/2$). Le due aste hanno la stessa lunghezza $L = 10$ cm, ma, essendo fatte di materiale diverso, hanno masse diverse; in particolare si ha $m_1 = 0.50$ kg e $m_2 = 2m_1 = 1.0$ kg.

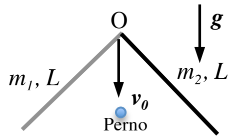
a) Qual è la posizione del centro di massa della squadretta rispetto al sistema di riferimento di figura? [Il sistema di riferimento che **dovete** usare è centrato nel punto O, quello di



saldatura tra le aste sottili, ha asse X diretto verso la destra e asse Y verso il basso della figura; ricordate che $cos(\pi/4) = sin(\pi/4) = 2^{1/2}/2$, con $2^{1/2} \sim 1.41$]

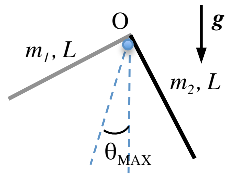
x_{CM} = ……………………….. ~ ……….. cm ; y_{CM} = ……………………….. ~ ……….. cm $x_{CM} = 2^{1/2}L/12 \sim 1.2$ cm ; $y_{CM} = 2^{1/2}L/4 \sim 3.5$ cm [per definizione è $\mathbf{r}_{CM} = \int \mathbf{r}dm/\int dm$, dove l'integrale è esteso all'intera regione delle due asticelle, dove la massa è non nulla. Eseguendo l'integrale (ovvero pensando che esso non è altro che una somma di tanti elementi) si fa presto a capire che $\mathbf{r}_{CM} = (m_1\, \mathbf{r}_{CM1}+m_2\, \mathbf{r}_{CM2})/(m_1+m_2)$, dove $\mathbf{r}_{CM1}$ e $\mathbf{r}_{CM2}$ sono le posizioni (espresse da vettori spiccati a partire dall'origine O) dei centri di massa delle due asticelle. Per l'omogeneità delle asticelle, questi trovano nei punti di mezzo delle asticelle stesse. Per l'asticella 1, tale posizione ha coordinate (rispetto al riferimento dato) $x_{CM1} =-(L/2)cos(\phi/2)$; $y_{CM1} = (L/2)sin(\phi/2)$. Per l'asticella 2 si ha: $x_{CM2} = - x_{CM1}$ e $y_{CM2} = y_{CM1}$. Tenendo conto della relazione tra le masse e del fatto che $\phi = \pi/2$ si ottiene il risultato]

b) Immaginate ora la squadretta sia posta in moto **esclusivamente traslatorio** in direzione verticale (in modo da mantenere pari a zero l'angolo tra la bisettrice della squadretta e la direzione verticale, come indicato in figura) con una velocità di modulo $v_0 = 1.0$ m/s diretta verso il basso. Durante il suo moto, il punto O di saldatura tra le asticelle incontra un perno rigido e fisso (un chiodo che sporge da una parete verticale su cui è conficcato). Nell'urto, il punto non rimbalza. In conseguenza dell'urto si osserva che la squadretta prende a ruotare (solo ruotare!) rispetto a questo perno fisso nel senso orario di figura. Discutete **per bene** in brutta quali grandezze fisiche rilevanti si conservano in questo processo di urto.



Discussione: ……………………….. L'urto tra squadretta e perno può essere considerato anelastico, dato che il moto traslatorio della squadretta scompare (si ha solo rotazione!) subito dopo che l'urto con il perno (fisso) ha avuto luogo. Dunque **non** si conserva l'energia cinetica. Inoltre **non** si conserva neanche la quantità di moto, dato che il "sistema" squadretta + perno è evidentemente non isolato. Oltre alle forze peso, che in questo contesto non disturbano la conservazione non essendo impulsive, ci sono delle forze di tipo impulsivo che il perno esercita sulla squadretta. D'altra parte se, per assurdo, si supponesse conservata la quantità di moto, la squadretta continuerebbe a traslare verso il basso. Tuttavia, dato che le forze esercitate dal perno sono applicate sul perno stesso e dunque hanno braccio nullo rispetto a questo, si conserva il momento angolare.

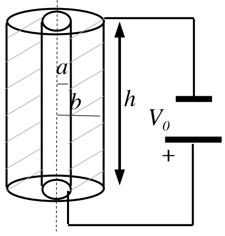
c) Si osserva che la rotazione della squadretta attorno al perno, che avviene con **attrito trascurabile**, si arresta "istantaneamente" quando la bisettrice della squadretta forma un angolo θ_{MAX} rispetto alla verticale (vedi figura). Quanto vale $cos(\theta_{MAX})$?



$cos(\theta_{MAX})$ = ……………………….. ~ …….. ≈ 0.94 [occorre suddividere il processo considerato in due fasi. In quello dell'urto si conserva il momento angolare e viene fornita alla squadretta una velocità angolare iniziale ω_0. Successivamente la squadretta ruota e si conserva l'energia meccanica, essendo gli attriti dichiarati trascurabili. Il valore di ω_0 si ottiene dalla conservazione del momento angolare rispetto ad O. Dopo l'urto questo si esprime come $I\omega_0$ con I momento di inerzia **totale** della squadretta in rotazione rispetto ad O. Questo si può ottenere come somma dei momenti di inerzia delle due asticelle che compongono la squadretta, ognuno dei quali (la rotazione avviene attorno a un asse che passa per l'estremo dell'asticella) vale $mL^2/3$. Si ha dunque $I = (m_1+m_2)L^2/3 = m_1L^2$. Il momento angolare prima dell'urto si può calcolare notando che la squadretta in questa fase si muove di moto puramente traslatorio con velocità v_0. È facile rendersi conto che il momento angolare si trova come $\mathbf{r}\mathrm{x}\mathbf{p}_{CM}$, dove la quantità di moto del centro di massa è diretta verticalmente verso il basso e vale in modulo $3m_1v_0$ ed $\mathbf{r}$ è il vettore che parte da O e giunge al centro di massa. Tenendo conto dell'angolo compreso e ricordandosi la definizione di braccio, si ottiene che il momento angolare rispetto ad O subito prima dell'urto vale $3m_1v_0x_{CM}$, con x_{CM} determinato sopra. Quindi si ha $\omega_0 = 3v_0x_{CM}/L^2 = v_0 2^{1/2}/(4L)$, dove abbiamo usato il valore di x_{CM} trovato prima. A questo punto la conservazione dell'energia meccanica implica $0 = \Delta E_K + \Delta U$, dove (alla "fine" la squadretta si ferma!) $\Delta E_K = -(I/2)\omega_0^2 = -m_1v_0^2/16$ mentre ΔU è dovuta alla variazione di quota del centro di massa, cioè $\Delta U = 3m_1g\Delta y_{CM}$, da cui $\Delta y_{CM} = v_0^2/(48g)$ La variazione di quota del centro di massa Δy_{CM} non è semplicissima da legare al valore di θ_{MAX} (l'esercizio sarebbe stato considerato pienamente svolto anche arrivando solo a questo punto), a causa della geometria un po' ingarbugliata. Tuttavia facendo un disegnino le cose diventano più chiare e abbastanza maneggiabili. Si vede che lo spostamento angolare della bisettrice (che inizialmente si trova sulla verticale) è pari allo spostamento angolare del centro di massa (il quale inizialmente non si trova sulla verticale, ma forma un angolo rispetto a questa pari a $\theta_{CM} = arctan(x_{CM}/y_{CM}) = arctan(1/3) = 0.32$ rad, essendo tale angolo descritto da un arco tracciato nel senso antiorario di figura). Dunque θ_{MAX} è pari allo spostamento angolare del centro di massa. Lavorando, purtroppo, con i numeri, cioè con i valori delle funzioni trigonometriche degli angoli (la soluzione non è esprimibile in forma analitica facilmente…, me ne dolgo e mi scuso) si ottiene la risposta. Ripeto comunque che l'esercizio sarebbe stato considerato svolto arrivando all'espressione della variazione di energia potenziale in funzione della quota del centro di massa, o espressione equivalente]

3. Un cilindro pieno di materiale ottimo conduttore, alto h = 10 cm e di raggio a = 1.0 mm (dunque con $h >> a$), è collegato al polo positivo di un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 50 V. Il polo negativo di questo generatore è collegato a un guscio cilindrico sottile, di raggio b = 5.0 mm e altezza h = 10 cm, coassiale al cilindro e anch'esso realizzato di materiale ottimo conduttore. Inizialmente lo spazio tra cilindro e guscio è vuoto e si suppone che il sistema abbia raggiunto condizioni di equilibrio. [Usate $\varepsilon_0 = 8.8\text{x}10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto]

Disegno non in scala!



a) Quanto vale la carica Q_a che si trova sulla superficie esterna del cilindro, cioè al raggio $r = a$?

Q_a = ... = ... C $V_0 2\pi\varepsilon_0 h/ln(b/a) = 1.7\text{x}10^{-10}$ C [si tratta di un banale condensatore ad armature cilindriche. Per il teorema di Gauss il campo tra le armature dipende dal raggio r secondo la legge $E(r) = Q_a/(2\pi\varepsilon_0 hr)$ mentre la differenza di potenziale tra le armature vale $\Delta V = -V_0 = -\int_a^b E(r)dr = -(Q_a/(2\pi\varepsilon_0 h))ln(b/a)$, dove il segno negativo al potenziale V_0 tiene conto del fatto che il guscio si trova a potenziale inferiore rispetto al cilindro, per come è collegato. Da qui si trova la soluzione. Notate che, di conseguenza, la capacità del condensatore vale $Q_a/V_0 = 2\pi\varepsilon_0 h/ln(b/a) = 3.4\text{x}10^{-12}$ F]

b) Supponete ora che lo spazio fra cilindro e guscio sia riempito di un materiale **omogeneo** debolmente conduttore, dotato di resistività ρ_C = 1.0x10^{-3} ohm m. Quanto vale l'intensità di corrente I erogata dal generatore in condizioni stazionarie?

I = ... = ... A $Q_a/(\varepsilon_0\rho_C) = 0.20$ A [tra le armature circola corrente a causa della presenza del materiale debolmente conduttore. Per definizione si ha $I = \Phi(\mathbf{j})$ dove $\mathbf{j} = \mathbf{E}/\rho_C$ è la densità di corrente, che è radiale come il campo elettrico, e il flusso è calcolato su una superficie che abbraccia l'intero cilindro interno (ed ha un raggio r generico, l'intensità di corrente non può dipendere dal raggio su cui si calcola il flusso!). Poiché il campo elettrico è radiale e dipende solo dal raggio, come stabilito nella risposta al punto precedente, su una qualsiasi superficie cilindrica di raggio r generico compreso tra a e b (che ha superficie $2\pi hr$) si ha che la densità di corrente ha valore uniforme, per cui $I = 2\pi hrE(r)/\rho_C$. Sostituendo l'espressione del campo elettrico trovata sopra si ottiene la soluzione. Notate che da questo calcolo si può valutare la resistenza $R = V_0/I$ del sistema. Sostituendo l'espressione di Q_a in funzione di V_0 trovata sopra si ha $R = \rho_C\, ln(b/a)/(2\pi h) = 2.5\text{x}10^2$ ohm]

c) Immaginate ora che all'istante t_0 = 0 il generatore venga improvvisamente **sostituito** da una resistenza R_{EXT} = 1.0 kohm. Dato che il generatore non c'è più, la carica inizialmente presente sul cilindro tende a diminuire nel tempo. Quanto vale il tempo caratteristico di scarica τ? [Dovete calcolarlo per bene, non limitarvi a esprimere la "formula" generale!]

τ = ... ~ .... ns ~ 0.6 ns [il sistema considerato sopra è evidentemente costituito dal parallelo tra un condensatore di capacità C e un resistore di resistenza R come calcolati sopra. Dato che al posto del generatore ora c'è una resistenza "esterna", anch'essa collegata in parallelo ai componenti citati, la scarica del condensatore avviene attraverso il **parallelo** delle due resistenze R e R_{EXT}. La resistenza equivalente è tale che $1/R_{TOT} = 1/R+1/R_{EXT}$ e il tempo di scarica è $\tau = R_{TOT}C$. lasciando perdere le espressioni letterali, che sono molto complicate da trascrivere, si ottiene $R_{TOT} \approx 200$ ohm da cui, usando l'espressione di C determinata sopra, la risposta]

== Termodinamica (opzionale/anni precedenti)

Un recipiente dotato di pareti rigide, indeformabili e **impermeabili al calore**, ha volume V = 1.00 l. Al suo interno può scorrere con attrito trascurabile un setto di spessore e massa trascurabili che divide il recipiente in due camere, A e B, contenenti rispettivamente n_A e n_B moli di un gas monoatomico che può essere considerato perfetto. Il setto scorre in direzione orizzontale ed è anch'esso realizzato con materiale **impermeabile al calore**. Si sa che $n_B = 2n$ e $n_A = n$ e che, ovviamente, $V = V_A+V_B$. Inoltre si osserva che, inizialmente, il sistema è in equilibrio con $V_A = V_B$ e T_A = 500 K. [Usate R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]

a) Quanto vale la temperatura T_B del gas che si trova nella camera B?

T_B = ………………………………………………. = ……………… K $T_A/2 = 250$ K [essendo il sistema in equilibrio, si ha $P_A = P_B$, da cui $(n_ART_A)/V_A = (n_BRT_B)/V_B$. Tenendo conto che $V_A=V_B$ e usando la relazione tra le moli data nel testo si ottiene la soluzione]

b) Supponete ora che un apposito dispositivo fornisca al (solo) gas presente nella camera A una certa quantità di calore Q_A (incognita). A seguito di questa cessione di calore, si osserva che il gas nella camera A si espande e il setto si sposta finché non viene raggiunta una nuova condizione di equilibrio in cui $V_A'=3V/4$. Il processo avviene in maniera quasi-statica, cioè in condizioni che si possono ritenere **reversibili**. Sapendo che n_A = 0.100 moli, quanto vale il calore Q_A?

Q_A = ………………………………………………. = ……………… J $(3R/2)n_AT_A(2^{5/3}-1+2^{1/3} -1/2) \sim 2.93(3R/2)n_AT_A = 1.83\text{x}10^3$ J [iniziamo con il notare che, per il primo principio della termodinamica, deve essere $Q_A=L_A+\Delta U_A$ e $0=L_B+\Delta U_B$, dove nell'ultima espressione abbiamo notato che il gas B subisce una trasformazione adiabatica. Inoltre, dato che A si espande e B si comprime, deve essere $L_A+L_B = 0$. Sommando tra di loro le espressioni per il primo principio in A e in B si ottiene quindi: $Q_A=\Delta U_A+\Delta U_B = n_Ac_V(T_A'-T_A+2T_B'-2T_B)$, dove si è sfruttata la relazione tra il numero di moli data nel testo. Come già affermato, il gas B subisce una trasformazione adiabatica che, sulla base di quanto affermato nel testo, può essere considerata reversibile. Dunque deve essere $T_B'=T_B(V_B/V_B')^{g-1}= T_B2^{2/3}$, dove si è usata la legge delle adiabatiche reversibili e si è tenuto conto che $V_B'=V-V_A'=V/4$ e che, per un gas perfetto monoatomico, $\gamma=c_P/c_V=5/3$. Si ottiene quindi $Q_A=n_Ac_V(T_A'-T_A+(T_A/2)(2^{2/3}-1))$, dove abbiamo usato la relazione, trovata sopra, $T_B=T_A/2$. Per determinare la soluzione occorre esprimere T_A'. A questo scopo notiamo che la nuova condizione di equilibrio richiede $P_A'=n_ART_A'= P_B'$. D'altra parte, essendo la trasformazione in B un'adiabatica reversibile, è $P_B'=P_B(V_B/V_B')^{g}=P_A2^{5/3}=n_ART_A2^{5/3}$, da cui $T_A'=T_A2^{5/3}$. Da qui, rimettendo tutto insieme, si ottiene la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 3/7/2013 Firma: