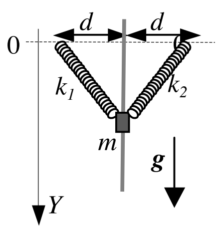
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE – 13/9/2013

Nome e cognome: …………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un piccolo manicotto di massa m = 40 g è infilato su un tondino rigido e fisso, disposto in direzione verticale, su cui può muoversi con attrito trascurabile. Al manicotto sono attaccate due molle di massa e lunghezza di riposo trascurabili, che hanno costanti elastiche k_1 = 1.0 N/m e $k_2 = 3k_1$ = 3.0 N/m. Come si vede in figura, le estremità delle due molle sono vincolate al "soffitto", in punti simmetrici rispetto al tondino e distanti d = 15 cm rispetto a questo. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



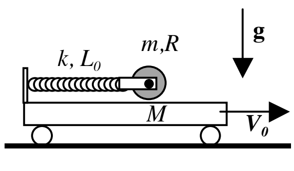
   a) Quanto vale la posizione y_{EQ} che il manicotto ha in condizioni di equilibrio? [Usate il riferimento **indicato in figura**, verticale, orientato verso il basso e centrato sul "soffitto"]
   y_{EQ} = …………………………….. = ………. m $mg/(k_1+k_2)$ = 9.8x10^{-2} m [il manicotto è vincolato a muoversi (eventualmente!) lungo l'asse verticale, che chiamiamo Y . Pertanto si deve cercare la condizione di equilibrio lungo questa direzione, cioè imporre che le componenti delle forze lungo tale direzione si bilancino. Le forze in questa direzione sono il peso, che punta verso il basso, e le componenti verticali delle forze elastiche che puntano verso l'alto (essendo trascurabile la lunghezza di riposo, le molle sono sempre estese) e che si ottengono moltiplicando il modulo delle forze elastiche per il coseno dell'angolo compreso tra l'asse delle molle e l'asse Y. Notiamo che tale angolo è lo stesso per ragioni geometriche per le due molle e che il suo valore, per la trigonometria, è dato da y/L , dove y è la posizione (generica) del manicotto e L è la lunghezza delle molle che, per Pitagora, vale $L = (y^2+d^2)^{1/2}$. D'altra parte il modulo della forza elastica si esprime come $F_i = k_i(L-L_0)$, con $i=1,2$ e L_0=0 (lunghezza di riposo trascurabile). Allora all'equilibrio deve verificarsi che $mg = (k_1+k_2)L_{EQ}y_{EQ}/L_{EQ} = (k_1+k_2)y_{EQ}$, da cui la risposta]

   b) Immaginate che il manicotto venga spostato nella posizione $y_0 = d$ = 15 cm e da qui venga lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. Quanto vale la posizione y' che corrisponde alla quota massima raggiunta dal manicotto nel suo movimento?
   y' = …………………………….. = ………. m $2mg/(k_1+k_2) - d$ = 4.6x10^{-2} m [il manicotto compie un'oscillazione attorno alla posizione di equilibrio y_{EQ} . La quota massima corrisponde alla situazione in cui il moto dell'oscillazione si inverte, cioè la velocità cambia di segno (e quindi è istantaneamente nulla). Dunque, detta A l'ampiezza dell'oscillazione, è $y' = y_{EQ}-A$. L'ampiezza dell'oscillazione, determinata dalla condizione iniziale, è $A = y_0-y_{EQ}$, da cui $y' = 2y_{EQ}-d = 2mg/(k_1+k_2)-d$. Al risultato si può giungere in maniera formalmente più corretta impostando l'equazione di conservazione dell'energia meccanica, valida grazie all'assenza di attrito: $0 = \Delta E_K+\Delta U$. La variazione dell'energia cinetica è nulla essendo il manicotto fermo all'inizio (la velocità iniziale è nulla) e alla quota massima. La variazione di energia potenziale è data dalla somma della variazione di energia potenziale dovuta alla forza peso (conservativa), $\Delta U_G = -mg(y'-y_0) = -mg(y'-d)$, e della energia elastica (conservativa) delle molle. Detta L_0 la lunghezza delle molle nella configurazione iniziale e L' quella nella situazione di quota massima, si ha $\Delta U_{ELA} = ((k_1+k_2)/2)(L'^2-L_0^2)$, dove abbiamo considerato che la lunghezza delle due molle è la stessa per motivi geometrici e che le energie potenziali si sommano. Per Pitagora si ha: $L'^2 = (y'^2+d^2)$, mentre $L_0^2 = (y_0^2+d^2) = 2d^2$. Dunque $(L'^2-L_0^2) = y'^2-d^2 = (y'-d)(y'+d)$, ovvero $\Delta U_{ELA} = ((k_1+k_2)/2)(y'-d)(y'+d)$. Riscrivendo l'equazione di conservazione dell'energia meccanica si ottiene: $mg(y'-d) = ((k_1+k_2)/2)(y'-d)(y'+d)$. Questa equazione ha soluzione banale $y' = d$ (che si riferisce alla condizione iniziale e dunque non è di interesse) e $y' = 2mg/(k_1+k_2) - d$, che è proprio quella citata prima]

   c) Quanto vale, in modulo, la velocità v_{EQ} con cui il manicotto passa per la posizione di equilibrio y_{EQ} determinata sopra?
   v_{EQ} = …………………………….. = ………. m/s $(d - y_{EQ})\,((k_1+k_2)/m)^{1/2}$ = 0.52 m/s il moto del manicotto è armonico. Infatti, detta y la posizione generica del manicotto rispetto all'asse considerato, la sua accelerazione, sulla base di quanto stabilito in precedenza, segue la legge: $a(y) = -((k_1+k_2)/m)y+g$, che è l'equazione di un moto armonico con pulsazione $\omega = ((k_1+k_2)/m)^{1/2}$. Dunque la legge oraria generica del moto è $y(t) = A\cos(\omega t+\phi) + y_{EQ}$ e quella della velocità è $v(t) = -\omega A\sin(\omega t+\phi)$. All'istante (agli istanti, sono infiniti!) in cui il manicotto passa per la posizione di equilibrio il termine $\cos(\omega t+\phi)$ si deve annullare, e di conseguenza il termine $\sin(\omega t+\phi)$ assume il suo valore massimo (in modulo), che è 1. Dunque in modulo si ha $v_{EQ} = A\omega$. Il parametro A può facilmente essere determinato dalle condizioni iniziali. Infatti all'istante t = 0 deve essere $y = y_0$, da cui $A = d - y_{EQ}$. In definitiva si ottiene la risposta. A tale risposta si può anche facilmente giungere ragionando in termini di conservazione dell'energia, seguendo (mutatis mutandis) il ragionamento esposto nella soluzione del punto precedente]

   d) Quanto vale l'intervallo di tempo Δt necessario affinché il manicotto passi (per la prima volta) dalla posizione y_0 alla posizione di equilibrio y_{EQ}?
   Δt = …………………………….. = ………. s $\pi/(2\omega) = \pi(m/(k_1+k_2))^{1/2}/2$ = 0.16 s [come già stabilito, il moto è armonico. Lo spostamento considerato, quello che avviene nell'intervallo Δt , è quello che porta dalla posizione iniziale, punto "estremo" dell'oscillazione, a quella "centrale", di equilibrio. L'intervallo di tempo corrispondente è $T/4$, con $T = 2\pi/\omega$, da cui la risposta]

2. Un carrellino di massa M = 4.0 kg può muoversi con **attrito trascurabile** lungo un binario orizzontale. Sul carrellino si trova una piccola ruota, che è ben approssimata da un cilindro **pieno e omogeneo** di massa $m = M/4$ = 1.0 kg e raggio R = 5.0 cm. La ruota può muoversi di **rotolamento puro** sul pianale **scabro** del carrellino. Attraverso un opportuno giogo di massa trascurabile attaccato all'asse della ruota, una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 1.3x10^2 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 40 cm, è collegata alla ruota. L'altro estremo della molla è vincolato a una sottile sponda che si trova al bordo del carrellino (vedi figura!) e l'asse della molla si trova sempre in direzione orizzontale. A un dato istante si fa una "fotografia" del sistema, e si vede che il carrello si sta muovendo con velocità V_0 = 1.0 m/s nel verso indicato in figura mentre il **centro di massa** della ruota è istantaneamente fermo in una posizione tale che la molla si trova alla propria lunghezza di riposo. Nell'evoluzione temporale successiva si



osserva che ovviamente il centro di massa della ruota si muove rispetto al carrello e dunque la molla cambia la propria lunghezza fino a raggiungere una lunghezza minima L'.

a) Quanto vale la velocità V' che possiede il carrello nell'istante (o negli istanti) in cui la molla assume la lunghezza minima L'?

V' = ... = ... m/s $4V_0/5 = 0.80$ m/s [il sistema costituito da carrello e ruota è isolato in direzione orizzontale, per cui in questa direzione si conserva la quantità di moto. Quindi in ogni istante deve essere $MV_0 = mv_{CM}+MV$, ovvero tenendo conto della relazione fra le masse, $4V_0 = v_{CM}+4V$. Nell'istante in cui la molla assume la propria lunghezza minima, carrello e ruota devono avere la stessa velocità di traslazione, cioè $v_{CM}' = V'$. Infatti se così non fosse a un istante immediatamente successivo la molla continuerebbe a comprimersi o a estendersi. Da qui si ottiene la soluzione dove, si noti, non è necessario stabilire se il moto della ruota rispetto al carrello è di rotolamento puro, o no. Naturalmente è corretto parlare di istanti poiché, per la presenza della molla, il moto relativo della ruota rispetto al carrello è armonico, cioè periodico e quindi la situazione descritta si ripete infinite volte]

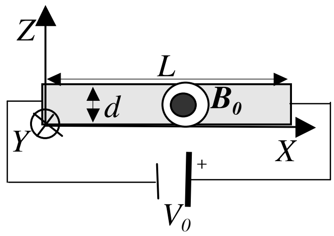
b) Quanto vale la velocità angolare ω' della ruota in questo stesso istante (o istanti)? [Attenzione: non fatevi ingannare e ragionate attentamente sul significato di moto di rotolamento puro, oppure figuratevi la situazione e fate le considerazioni relative, spiegando in ogni caso per benino, in brutta, qual è il vostro ragionamento]

ω' = ... = ... rad/s 0 [nell'istante considerato il centro di massa della ruota è **fermo rispetto** al pianale del carrello. In queste condizioni non c'è rotazione!]

c) Quanto vale L'?

L' = ... = ... m $L_0-(13m/(10k))^{1/2}V_0 = 0.30$ m [se il rotolamento è puro (nelle fasi in cui esso si verifica) la forza di attrito tra pianale e ruota, l'unica che si suppone presente nel sistema, non fa lavoro. Dunque si conserva l'energia meccanica: $0 = \Delta E_K+\Delta U_{ELA}$. L'energia cinetica "finale" deve tenere conto del moto del carrello, $(M/2)V'^2$ e del moto traslazionale della ruota, $(m/2)V'^2$ per cui l'energia cinetica "finale" complessiva si può scrivere: $(V'^2/2)(M+m) = (5/2)mV'^2 = (8/5)mV_0^2$, dove abbiamo usato la relazione tra le masse e l'espressione di V' trovata sopra. Per il calcolo dell'energia cinetica "iniziale" del sistema occorre considerare innanzitutto il moto del carrello, che dà luogo al termine $(M/2)V_0^2$. Inoltre occorre chiedersi cosa ne è del moto rotazionale della ruota. Infatti è evidente che in questo istante la ruota deve trovarsi in rotazione, dato che il suo centro di massa ha una velocità relativa non nulla (pari a V_0) rispetto al pianale del carrello. Poiché si suppone che il moto sia di rotolamento puro, si ha $\omega_0 = V_0/R$, per cui si ha un termine di energia cinetica **"iniziale"** $(I/2)\omega_0^2 = (V_0^2/2)(mR^2/2)/R^2 = (m/2)(V_0^2/2)$, dove abbiamo usato il momento di inerzia del cilindro pieno omogeneo. Dunque l'energia cinetica "iniziale" complessiva è $(M+m/2)(V_0^2/2) = (9/4)mV_0^2$ e $\Delta E_K = (8/5-9/4)mV_0^2 = -(13/20)mV_0^2$. Per il calcolo di ΔU_{ELA} occorre rammentare che l'**energia elastica** di una molla di lunghezza L generica si esprime come $(k/2)(L-L_0)^2$. Dunque, notando che "inizialmente" la molla si trova alla propria lunghezza di riposo, e quindi ha energia nulla, si ha $\Delta U_{ELA} = (k/2)(L'-L_0)^2$. Si ottiene allora $(L'-L_0) = \pm(13m/(10k))^{1/2}V_0$. Questa equazione fornisce due soluzioni in funzione del segno, una relativa al massimo allungamento e l'altra (che corrisponde alla scelta del segno negativo) alla massima compressione. Da qui la risposta]

3. Una lastra di base **quadrata**, con lato di base di lunghezza L = 50 cm e spessore d = 5.0 cm, è fatta di materiale discreto conduttore, di resistività elettrica $\rho_C = 1.0\text{x}10^{-2}$ ohm m, distribuito omogeneamente al suo interno. La lastra è poggiata sul piano XY di un dato sistema di riferimento (un vertice coincide con l'origine, come in figura, dove la lastra è rappresentata in sezione). Le due facce "laterali" della lastra (vedi figura per capire!) sono collegate, tramite elettrodi fatti di ottimo conduttore, ad un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 10 V. [Trascurate ogni effetto della gravità]



a) Quanto vale la potenza P che il generatore fornisce in condizioni stazionarie? [Supponete che la corrente fluisca uniformemente all'interno della lastra]

P = ... = ... W $V_0^2d/\rho_C = 5.0\text{x}10^2$ W [il generatore fornisce una potenza che viene "dissipata" per effetto Joule dal passaggio della corrente nel materiale resistivo. Assumendo, come indicato nel testo, che la corrente fluisca uniformemente nel materiale, si ha che la resistenza della lastra è $R = \rho_C L/(dL)$. La potenza vale V_0^2/R, da cui la risposta]

b) Sapendo che la densità dei portatori di carica (sia positivi che negativi) che costituiscono la corrente è $n = 1.0\text{x}10^{20}$ m^{-3}, quanto vale, in condizioni stazionarie, il modulo della loro velocità v? [Si intende che nella realtà la corrente è fatta di elettroni che si muovono, ma, come al solito, un elettrone che si muove in un verso equivale a un portatore di carica positiva che si muove in verso opposto. Usate il valore $e = -1.6\text{x}10^{-19}$ C per la carica dell'elettrone]

v = ... = ... m/s $V_0/(ne\rho_C L) = 1.25\text{x}10^2$ m/s [nelle condizioni del problema, in cui la corrente è uniforme all'interno della lastra, si ha $I = Ld|j|$, con $\boldsymbol{j} = ne\boldsymbol{v}$ densità di corrente. D'altra parte è anche $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{E}/\rho_C$ e, sempre a causa della uniformità della corrente, $E = V_0/L$. Si ottiene quindi $v = E/(ne\rho_C)$, da cui la soluzione]

c) Supponete ora che la lastra sia interessata da un campo magnetico **uniforme** di modulo $B_0 = 1.0\text{x}10^{-3}$ T diretto lungo il verso negativo dell'asse Y, come indicato in figura. Quanto vale la differenza di potenziale $\Delta V = V(z=d) - V(z=0)$ che si stabilisce tra le facce superiore ed inferiore della lastra in condizioni stazionarie?

ΔV = ... = ... V $vB_0d = 6.2\text{x}10^{-3}$ V [sui portatori di carica q agisce la forza di Lorentz $\boldsymbol{F_M} = q\,\boldsymbol{v}\text{X}\boldsymbol{B_0}$. Tale forza ha direzione Z e verso che dipende dal segno delle cariche: quelle positive sono spinte verso l'alto e quelle negative verso il basso. In condizioni stazionarie si assiste a una separazione di cariche che rende la lastra simile, dal punto di vista elettrostatico, a un condensatore a armature piane parallele. La forza di Lorentz per unità di carica è dunque, in modulo, vB_0 e, essendo essa uniforme all'interno della lastra (in sostanza si trascurano gli "effetti ai bordi", la differenza di potenziale, che si ottiene integrando in direzione Z questa forza per unità di carica, è vB_0d. Sostituendo l'espressione di v si ottiene la risposta, dove si è anche tenuto conto del fatto che la faccia superiore, dove si addensano le cariche positive, ha potenziale maggiore di quella inferiore. Notate che questo risultato ha una notevole valenza applicativa, ed ha un nome specifico, quello di "effetto Hall"]

d) Quanto vale la densità di carica superficiale σ che si ritrova, in condizioni stazionarie, sulla faccia superiore della lastra? [Supponete tale densità di carica uniforme; usate $\varepsilon_0 = 8.8\text{x}10^{-12}$ F/m]

σ = ... = ... C/m^2 $vB_0\varepsilon_0 = 1.1\text{x}10^{-12}$ C/m^2 [come già notato, il sistema assomiglia a un condensatore a armature piane parallele. Dunque si può supporre che il campo elettrico all'esterno della lastra sia nullo. All'interno esso è dato da $\Delta V/d = vB_0$. Applicando il teorema di Gauss a una scatoletta cilindrica con l'asse parallelo all'asse Z e i tappi uno all'interno e uno all'esterno della lastra si trova, essendo ΔS la sezione di base della scatola, ovvero l'area dei tappi: $E\Delta S = \sigma\Delta S/\varepsilon_0$ ("teorema di Coulomb"), da cui la soluzione]

=== Termodinamica (opzionale/anni precedenti)

Un recipiente dotato di pareti rigide, indeformabili e **impermeabili al calore**, ha volume V = 1.00 l. Al suo interno può scorrere con attrito trascurabile un setto di spessore e massa trascurabili che divide il recipiente in due camere, A e B, contenenti rispettivamente n_Ae $n_B$moli di un gas monoatomico che può essere considerato perfetto. Il setto scorre in direzione orizzontale ed è anch'esso realizzato con materiale **impermeabile al calore**. Si sa che $n_B = 2n$ e $n_A = n$ e che, ovviamente, $V = V_A+V_B$. Inoltre si osserva che, inizialmente, il sistema è in equilibrio con $V_A = V_B$e T_A = 500 K. [Usate R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]

a) Quanto vale la temperatura $T_B$del gas che si trova nella camera B?

T_B = ……………………………………………. = ……………… K $T_A/2$ = 250 K [essendo il sistema in equilibrio, si ha $P_A = P_B$, da cui $(n_ART_A)/V_A = (n_BRT_B)/V_B$. Tenendo conto che $V_A=V_B$e usando la relazione tra le moli data nel testo si ottiene la soluzione]

b) Supponete ora che un apposito dispositivo fornisca al (solo) gas presente nella camera A una certa quantità di calore Q_A(incognita). A seguito di questa cessione di calore, si osserva che il gas nella camera A si espande e il setto si sposta finché non viene raggiunta una nuova condizione di equilibrio in cui $V_A'=3V/4$. Il processo avviene in maniera quasi-statica, cioè in condizioni che si possono ritenere **reversibili**. Sapendochen_A = 0.100 moli,quanto vale ilcaloreQ_A?

Q_A = ……………………………………………. = ……………… J $(3R/2)n_AT_A(2^{5/3}-1+2^{1/3}\ \ -1/2) \sim 2.93(3R/2)n_AT_A$ = $1.83\text{x}10^3$ J [iniziamo con il notare che, per il primo principio della termodinamica, deve essere $Q_A=L_A+\Delta U_A$ e $0=L_B+\Delta U_B$, dove nell'ultima espressione abbiamo notato che il gas B subisce una trasformazione adiabatica. Inoltre, dato che A si espande e B si comprime, deve essere $L_A+L_B = 0$. Sommando tra di loro le espressioni per il primo principio in A e in B si ottiene quindi: $Q_A=\Delta U_A+\Delta U_B = n_Ac_V(T_A'-T_A+2T_B'-2T_B)$, dove si è sfruttata la relazione tra il numero di moli data nel testo. Come già affermato, il gas B subisce una trasformazione adiabatica che, sulla base di quanto affermato nel testo, può essere considerata reversibile. Dunque deve essere $T_B'=T_B(V_B/V_B')^{g-1}= T_B2^{2/3}$, dove si è usata la legge delle adiabatiche reversibili e si è tenuto conto che $V_B'=V-V_A'=V/4$ e che, per un gas perfetto monoatomico, $\gamma=c_P/c_V=5/3$. Si ottiene quindi $Q_A=n_Ac_V(T_A'-T_A+(T_A/2)(2^{2/3}-1))$, dove abbiamo usato la relazione, trovata sopra, $T_B=T_A/2$. Per determinare la soluzione occorre esprimere T_A'. A questo scopo notiamo che la nuova condizione di equilibrio richiede $P_A'=n_ART_A'= P_B'$. D'altra parte, essendo la trasformazione in B un'adiabatica reversibile, è $P_B'=P_B(V_B/V_B')^g=P_A2^{5/3}=n_ART_A2^{5/3}$, da cui $T_A'=T_A2^{5/3}$. Da qui, rimettendo tutto insieme, si ottiene la soluzione]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 13/9/2013 Firma: