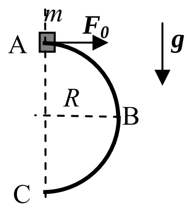
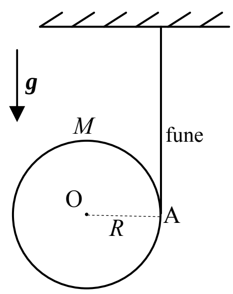
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE – 20/2/2014

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

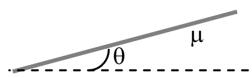
Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*



1. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 0.20 kg può scorrere con **attrito trascurabile** lungo una guida costituita da un tondino rigido e fisso modellato in modo da formare una semicirconferenza di raggio R = 50 cm disposta su un piano verticale, come rappresentato in figura. Inizialmente il manicotto si trova fermo alla sommità della guida (punto A di figura). Quindi su di esso viene fatta agire una forza $\boldsymbol{F_0}$ **costante e uniforme** che ha direzione orizzontale, verso come in figura e modulo F_0 = 2.0 N. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]
   a) Quanto vale, in modulo, la velocità v_B con cui il manicotto passa per la posizione B di figura (a "metà strada" sulla guida)?
   v_B = ………………………………………….~ ………. m/s $(2F_0R/m+2gR)^{1/2}$ ~ 4.4 m/s [poiché l'attrito è trascurabile conviene servirsi del bilancio energetico che ad esempio possiamo scrivere nella forma: $L = \Delta E_K+\Delta U$. In questa espressione L rappresenta il lavoro della forza $\boldsymbol{F_0}$ calcolato sullo spostamento tra A e B. Tenendo conto che la forza ha direzione orizzontale e che essa è costante e uniforme, si ha $L = F_0R$, dove abbiamo notato che R è la proiezione dello spostamento nella direzione (orizzontale) della forza. Inoltre la variazione di energia cinetica è $(m/2)v_B^2$ (il manicotto è inizialmente fermo!) mentre la variazione di energia potenziale è dovuta alla forza peso, per cui ΔU= -mgR. Mettendo tutto insieme si ottiene la soluzione]
   b) Quanto vale, in modulo, la forza di reazione F_B che la guida esercita sul manicotto nell'istante in cui esso **passa** per la posizione B?
   F_B= ………………………………….= ……….. N $2(F_0+mg)$ = 11 N [quando passa per il punto in questione il manicotto si sta muovendo alla velocità v_B in direzione ovviamente tangenziale. Dunque su di esso deve agire un'accelerazione centripeta, diretta verso il centro di curvatura della semicirconferenza, di modulo $a_C = v_B^2/R = 2(F_0/m+g)$. Questa accelerazione deve essere prodotta dalle forze che hanno direzione e verso corretti. Nella posizione considerata, l'unica forza che soddisfa i requisiti di direzione e verso richiesti è la forza di reazione vincolare esercitata dal manicotto, da cui la soluzione]
   c) Quanto vale, in modulo, la forza di reazione F_C che la guida esercita sul manicotto nell'istante in cui esso **passa** per la posizione C? [La posizione C è la fine della guida e considerate che quando arriva alla fine della guida il manicotto non si fermi immediatamente]
   F_C= ………………………………….= ……….. N $5mg$ = 9.8 N [la velocità del manicotto quando esso arriva alla posizione C si ottiene dal bilancio energetico, notando che stavolta il lavoro della forza è nullo (è nullo lo spostamento in direzione della forza!) e che la variazione di quota è $2R$. Di conseguenza si ha $0 = (m/2)v_C^2-2mgR$, da cui $v_C^2 = 4gR$. L'accelerazione centripeta è allora $a_C = 4g$, diretta stavolta verticalmente verso l'alto. Questa accelerazione deve essere fornita dalla combinazione della reazione vincolare, orientata nel verso "giusto" (verso l'alto) e della forza peso, orientata nel verso opposto. Si ha quindi: $ma_C = 4mgR = F_C – mg$, da cui la soluzione]



2. Uno yo-yo è fatto da un cilindro **pieno e omogeneo** di massa M = 0.30 kg e raggio R = 10 cm. Sulla superficie laterale del cilindro è avvolto un filo inestensibile e di massa trascurabile, che, durante il movimento dello yo-yo, si svolge senza scivolare sulla superficie del cilindro, a cui è tangente nel punto A di figura. Un estremo del filo è attaccato a un solaio rigido, come indicato in figura. Nel moto dello yo-yo si possono trascurare gli attriti. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]
   a) Inizialmente lo yo-yo è tenuto fermo in una certa posizione, e in corrispondenza il filo è teso e ha direzione verticale. A un certo istante, t_0 = 0, lo yo-yo è lasciato libero di muoversi. Quanto vale l'accelerazione a_{CM} del centro di massa del cilindro?
   a_{CM} = ……………………….. = ………. m/s^2 $2g/3$ = 6.5 m/s^2 [il cilindro ruota attorno al proprio asse e il suo centro di massa trasla verticalmente verso il basso. Considerando come polo di rotazione il punto O (centro di massa del cilindro) e usando un asse verticale orientato verso il basso, le equazioni del moto recitano: $a_{CM} = g-T/M$ e $\alpha = TR/I$, dove abbiamo notato che l'unica forza che fa momento rispetto al polo considerato è la tensione della fune (che non slitta e dunque trasferisce una forza al cilindro applicata al punto di contatto). Sapendo che per un cilindro pieno omogeneo si ha $I = MR^2/2$, si ha $\alpha = 2T/(MR)$. Dato che la fune non slitta sulla superficie laterale del cilindro, si ha anche $a_{CM} = \alpha/R$. Con questa equazione si ottiene un sistema di tre equazioni e tre incognite che, risolto per l'incognita a_{CM}, fornisce la soluzione T, fornisce la soluzione. Notate che l'accelerazione trovata è costante e minore in modulo dell'accelerazione di gravità g. Osservate poi che allo stesso risultato si poteva arrivare considerando il moto del cilindro come di sola rotazione rispetto al punto di contatto, istantaneamente fisso, A. In questo caso l'unica equazione del moto sarebbe stata $\alpha = MgR/I'$, con $I' = I+MR^2 = 3MR^2/2$ per il teorema degli assi paralleli (la rotazione avviene attorno a un asse parallelo a quello passante per il centro di massa). Dall'equazione esce un'accelerazione angolare $\alpha = 2g/(3R)$, da cui $a_{CM} = \alpha R = 2g/3$] NOTA: nel foglio distribuito a lezione il piano



Disegno non in scala!!!!

inclinato era orientato in modo sbagliato (all'opposto). Se ne è ovviamente tenuto abbondante conto nella correzione.

b) Quanto vale l'istante t' a cui il cilindro ha compiuto un giro completo?

t' = ……………………….. ~ ……….. s $(6\pi R/g)^{1/2} \sim 0.44$ s [sappiamo che il moto di rotazione avviene con accelerazione angolare **costante e uniforme** $\alpha = a_{CM}/R = 2g/(3R)$. Inoltre sappiamo che il cilindro parte da fermo, cioè non ha velocità iniziale (né traslazionale né rotazionale). Dunque la legge oraria del moto rotazionale è semplicemente $\Delta\theta = \alpha t^2/2$. All'istante considerato si ha $\Delta\theta = \Delta\theta' = 2\pi$, da cui la soluzione (si esclude ovviamente la soluzione negativa, che non ha significato fisico)]

c) Immaginate ora che, proprio all'istante t' sopra determinato, la fune venga tagliata. Quanto vale la velocità angolare ω'' del cilindro all'istante $t'' = 2t'$? [Nell'intervallo t',t'' la fune non c'è!]

ω'' = ……………………….. ~ …….. rad/s $\omega' = \alpha t' = (4\pi\alpha)^{1/2} = (8\pi g/(3R))^{1/2} \sim 29$ rad/s [dopo il taglio della fune sul cilindro non agisce più alcuna forza in grado di produrre momento. Dunque nell'intervallo t',t'' l'accelerazione angolare è nulla e la velocità angolare non cambia, cioè ω'' = ω'. Per calcolare ω' (velocità angolare all'istante t') si può sfruttare quanto già osservato: il moto angolare nell'intervallo di tempo t',t'' è uniformemente accelerato, per cui la legge oraria della velocità è ω,= αt (la velocità iniziale è nulla!), Quindi $\omega' = \alpha t'$, da cui, sostituendo l'espressione di α e t' determinate sopra, la soluzione. Un modo alternativo, ma più complicato dal punto di vista algebrico, per determinare ω' si basa sulla conservazione dell'energia meccanica, che vale essendo trascurabili gli attriti. Si ha $0 = \Delta E_K + \Delta U$. La variazione di energia cinetica può essere espressa con un termine dovuto alla traslazione, $Mv_{CM}^2/2$, sommato a uno dovuto alla rotazione, $I\omega^2/2$. Poiché la fune non slitta sulla superficie del cilindro si ha $\omega = v_{CM}/R$ e quindi $\Delta E_K = (3/4)MR^2\omega'^2$. La variazione di energia potenziale è dovuta alla forza peso e si esprime $\Delta U = -Mg\Delta h$, dove Δh è la diminuzione di quota del centro di massa del cilindro (il segno negativo tiene conto del fatto che lo yo-yo scende verso il basso). Quando il cilindro ha compiuto un giro completo, il filo si è srotolato di un tratto $2\pi R$, che è anche pari alla variazione di quota Δh. Dunque si ha $(3/4)MR^2\,\omega'^2 = 2\pi RMg$, da cui $\omega' = (8\pi g/(3R))^{1/2}$, che corrisponde a quanto trovato in precedenza con l'altro metodo]

d) "Sotto" allo yo-yo, come indicato nella figura (non in scala), si trova un piano inclinato **scabro** su cui immaginate che il cilindro possa cadere **senza rimbalzare** esattamente nell'istante t''. Discutete per benino in brutta se esiste una condizione sull'angolo θ tra piano inclinato e orizzontale che dà la possibilità di avere moto di rotolamento puro **subito dopo** l'arrivo del cilindro sul piano inclinato. [State attenti: non vi si chiede di impelagarvi in ragionamenti sulla forza di attrito o cose del genere: dovete ragionare in termini cinematici e, poiché il coefficiente di attrito è ignoto, non è detto che la condizione cercata garantisca davvero il rotolamento puro dall'istante t'' in avanti]

Discussione: ……………………….…….. La condizione di rotolamento puro impone $v_{CM} = \omega R$. Subito dopo l'arrivo del cilindro sul piano inclinato, possiamo supporre che le velocità di traslazione (del centro di massa) e di rotazione non vengano modificate (in modulo) rispetto ai valori che esse hanno all'istante t''. Tuttavia subito dopo l'arrivo sul piano inclinato il centro di massa comincia a muoversi nella direzione del piano stesso, per cui la velocità v_{CM} è rappresentata dalla proiezione di v_{CM}'' (subito prima dell'arrivo, cioè all'istante t'') lungo il piano: $v_{CM} = v_{CM}''\sin\theta$. D'altra parte v_{CM}'' si può calcolare considerando che nell'intervallo t',t'' la traslazione avviene per il solo effetto della forza peso: $v_{CM}'' = v_{CM}'+g(t''-t') = v_{CM}'+gt'$, con $t' = (6\pi R/g)^{1/2}$ determinato prima e $v_{CM}' = \omega' R = \omega'' R$. Affinché si possa avere rotolamento puro da **subito** dopo l'arrivo del cilindro sul piano inclinato occorre quindi che $\omega''R = (\omega''R+(6\pi Rg)^{1/2})\sin\theta$, cioè $\sin\theta = 1/(1+((6\pi Rg)^{1/2}/(\omega''R))) = 1/(1+(9/4)^{1/2}) = 1/(1+3/2)=2/5$, dove per gli ultimi passaggi abbiamo sostituito ω'' con l'espressione trovata sopra e fatto qualche semplificazione. Notate che affinché il moto si mantenga di rotolamento puro occorre a questo punto verificare che la forza di attrito generata dal contatto sia tale da soddisfare la condizione dinamica richiesta, cosa che però non è richiesto di verificare]

3. Un solenoide di lunghezza L = 1.0 m e raggio a = 2.0 cm (dunque con $a<<L$, per cui si può ritenere che esso si comporti in modo "ideale"), composto da N = 100 spire, è collegato a un generatore che eroga una **corrente** variabile nel tempo. In particolare, l'intensità di corrente è $I(t)= I_0\cos(\omega t)$, con I_0 = 1.0 A e $\omega = 3.0\times10^2$ rad/s. Notate che il filo di cui è fatto il solenoide può essere considerato di resistività trascurabile, per cui la resistenza del solenoide è **trascurabile**. [Usate $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ T m/A per la costante di permittività magnetica del vuoto]

a) Come si esprime l'intensità del campo magnetico $B(t)$ presente all'interno del solenoide? [Per questa risposta supponete che il sistema si comporti in modo **quasi-stazionario**, cioè usate la stessa espressione del campo che si ha in condizioni statiche; inoltre, dovendo scrivere una **funzione del tempo**, non usate valori numerici!]

$B(t)$ = …………………………………… $\mu_0(N/L)I_0\cos(\omega t)$ [banalmente, basta ricordarsi dell'espressione del campo magnetico all'interno di un solenoide ideale, quella che si ottiene applicando in modo corretto il teorema di Ampere. Si ha $B = \mu_0(N/L)I$, da cui, inserendo l'espressione della dipendenza temporale di I, la risposta]

b) Come si esprime la differenza di potenziale $\Delta V(t)$ che si stabilisce ai capi del solenoide? [In questo caso **dovete** tenere conto della natura non stazionaria delle grandezze in gioco, in accordo con l'ipotesi quasi-stazionaria; inoltre, anche qui dovete scrivere una funzione del tempo, per cui niente valori numerici!]

$\Delta V(t)$ = ………………………….. $\pi a^2\mu_0(N^2/L)I_0\omega\sin(\omega t)$ [cominciamo con il notare che la presenza di un campo magnetico variabile nel tempo implica un flusso di campo magnetico $\Phi(\mathbf{B})$ che è anche variabile nel tempo. Secondo la legge di Faraday, questo significa che si può sviluppare una forza elettromotrice che può dare luogo alla presenza di una differenza di potenziale variabile nel tempo (indotta dal campo magnetico variabile nel tempo). Calcoliamo il flusso del campo magnetico sulla superficie di una **spira** del solenoide: visto che il campo è uniforme e diretto assialmente, cioè ortogonale alla superficie considerata, si ha semplicemente $\Phi(\mathbf{B}) = B(t)\pi a^2$. Per Faraday si ha che la forza elettromotrice sulla spira, cioè la differenza di potenziale “ai capi” della spira, è $\Delta V_{SPIRA}(t) = - d\Phi(\mathbf{B})/dt =- \pi a^2\mu_0(N/L)dI(t)/dt = \pi a^2\mu_0(N/L)I_0\omega sin(\omega t)$. Poiché il solenoide è fatto di N spire, per ognuna delle quali la differenza di potenziale è $\Delta V_{SPIRA}(t)$ (si trascurano gli “effetti ai bordi” vista l’idealità dichiarata per il solenoide!), collegate una dietro l’altra, cioè “in serie”, la differenza di potenziale ai capi del solenoide si ottiene sommando NN volte $\Delta V_{SPIRA}(t)$, da cui il risultato]

c) Considerate ora la potenza istantanea $P(t)$ erogata dal generatore: quanto ne vale il valore massimo, cioè “di picco”, P_{max}? Quanto ne vale il valore medio P_{media}? [Si intende che il valore di picco è il massimo valore assunto dalla potenza istantanea nel tempo. Ricordate che la resistenza è trascurabile! Inoltre ricordate la definizione di valore medio per una funzione generica $f(t)$ periodica nel tempo: $f_{media} = (1/T)\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)dt$, con T periodo della funzione. State accorti: non dovete fare troppi conti!]

P_{max} = ………………………….. = ……… W $\pi a^2\mu_0(N^2/L)I_0^2\omega/2 = 2.4\text{x}10^{-3}$ W[la potenza $P(t)$ erogata dal generatore è data per definizione da $\Delta V(t)I(t)$, dove $I(t)$ è la corrente generata e $\Delta V(t)$ la differenza di potenziale ai capi del generatore, che è la stessa che si ha ai capi del solenoide che si è determinata sopra. Si ha quindi $P(t) = \pi a^2\mu_0(N^2/L)I_0^2\omega sin(\omega t)\ cos(\omega t)$. La parte dipendente dal tempo va quindi come il prodotto $sin(\omega t)cos(\omega t)=sin(2\omega t)/2$, che ha valore massimo ½ negli istanti in cui $2\omega t = \pi/2$ (notate che la potenza oscilla a frequenza “doppia” rispetto alla corrente!). Da qui la risposta]

P_{media} = ………………………….. = ……… W 0 [secondo la definizione, dobbiamo integrare la $P(t)$ nel tempo (su un periodo). Concentriamoci sulla parte che dipende dal tempo: dobbiamo sostanzialmente calcolare l’integrale $\int sinxcosxdx$, con $x = \omega t$ ed estremi di integrazione $-\omega T/2 = -\pi$ e $\omega T/2 = \pi$ (ricordate: $T = 2\pi/\omega$!). Questo integrale, a meno di fattori, è esprimibile come $\int sin(2x)\ d(2x)$, con estremi di integrazione -2π e 2π. Tutti sapete che l’integrale in questione fa zero. Infatti la funzione considerata oscilla attorno allo zero (con frequenza 2ω) e quindi il suo valore medio è nullo!]

== Termodinamica (opzionale/anni precedenti)

Un recipiente dotato di pareti rigide, indeformabili e **impermeabili al calore**, ha volume V = 1.00 l. Al suo interno può scorrere con attrito trascurabile un setto di spessore e massa trascurabili che divide il recipiente in due camere, A e B, contenenti rispettivamente n_A e n_B moli di un gas monoatomico che può essere considerato perfetto. Il setto scorre in direzione orizzontale ed è anch’esso realizzato con materiale **impermeabile al calore**. Si sa che $n_B = 2n$ e $n_A = n$ e che, ovviamente, $V = V_A+V_B$. Inoltre si osserva che, inizialmente, il sistema è in equilibrio con $V_A = V_B$ e T_A = 500 K. [Usate R = 8.31 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]

a) Quanto vale la temperatura T_B del gas che si trova nella camera B?

T_B = ……………………………………………. = …………….. K $T_A/2$ = 250 K [essendo il sistema in equilibrio, si ha $P_A = P_B$, da cui $(n_ART_A)/V_A = (n_BRT_B)/V_B$. Tenendo conto che $V_A=V_B$ e usando la relazione tra le moli data nel testo si ottiene la soluzione]

b) Supponete ora che un apposito dispositivo fornisca al (solo) gas presente nella camera A una certa quantità di calore Q_A (incognita). A seguito di questa cessione di calore, si osserva che il gas nella camera A si espande e il setto si sposta finché non viene raggiunta una nuova condizione di equilibrio in cui $V_A’=3V/4$. Il processo avviene in maniera quasi-statica, cioè in condizioni che si possono ritenere **reversibili**. Sapendo che n_A = 0.100 moli, quanto vale il calore Q_A?

Q_A = ……………………………………………. = …………….. J $(3R/2)n_AT_A(2^{5/3}-1+2^{1/3}\ \ -1/2) \sim 2.93(3R/2)n_AT_A$ = $1.83\text{x}10^3$ J [iniziamo con il notare che, per il primo principio della termodinamica, deve essere $Q_A=L_A+\Delta U_A$ e $0=L_B+\Delta U_B$, dove nell’ultima espressione abbiamo notato che il gas B subisce una trasformazione adiabatica. Inoltre, dato che A si espande e B si comprime, deve essere $L_A+L_B = 0$. Sommando tra di loro le espressioni per il primo principio in A e in B si ottiene quindi: $Q_A=\Delta U_A+\Delta U_B = n_Ac_V(T_A’-T_A+2T_B’-2T_B)$, dove si è sfruttata la relazione tra il numero di moli data nel testo. Come già affermato, il gas B subisce una trasformazione adiabatica che, sulla base di quanto affermato nel testo, può essere considerata reversibile. Dunque deve essere $T_B’=T_B(V_B/V_B’)^{\square-1}= T_B2^{2/3}$, dove si è usata la legge delle adiabatiche reversibili e si è tenuto conto che V_B ‘$=V-V_A’=V/4$ e che, per un gas perfetto monoatomico, $\gamma=c_P/c_V=5/3$. Si ottiene quindi $Q_A=n_Ac_V(T_A’-T_A+(T_A/2)(2^{2/3}-1))$, dove abbiamo usato la relazione, trovata sopra, $T_B=T_A/2$. Per determinare la soluzione occorre esprimere $T_A’$. A questo scopo notiamo che la nuova condizione di equilibrio richiede $P_A’=n_ART_A’= P_B’$. D’altra parte, essendo la trasformazione in B un’adiabatica reversibile, è $P_B’=P_B(V_B/V_B’)^{\square}=P_A2^{5/3}=n_ART_A2^{5/3}$, da cui $T_A’=T_A2^{5/3}$. Da qui, rimettendo tutto insieme, si ottiene la soluzione]

Nota: acconsento che l’esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 20/2/2014 Firma: