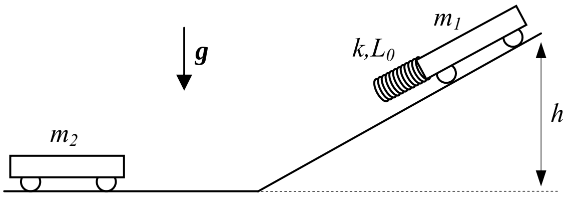
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE – 12/6/2014

Nome e cognome: …………………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un carrello, che nel seguito chiameremo "carrello 1" (e considereremo quando necessario puntiforme), ha massa $m_1 = m = 10$ kg e può muoversi con **attrito trascurabile** su un percorso costituito da un piano inclinato seguito da un tratto orizzontale molto lungo (la figura non è in scala!!). Il carrello è dotato, sulla parte anteriore, di un "respingente" costituito da una molla di costante elastica $k = 2.0\text{x}10^5$ N/m e lunghezza a riposo $L_0 = 10$ cm. Inizialmente esso si trova sulla sommità del piano inclinato, ad altezza $h = 5.0$ m rispetto alla quota del tratto orizzontale; a un dato istante esso parte da fermo, scende per il piano inclinato e quindi, giunto sul tratto orizzontale, incontra un carrello simile, denominato "carrello 2", di massa $m_2 = 4m = 40$ kg.



Disegno assolutamente non in scala!!!!

La molla "respingente" comincia allora a comprimersi fino a raggiungere (istantaneamente) un dato valore massimo di compressione. [Usate $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità. Notate che, ovviamente, prima che il carrello 1 abbia incontrato il carrello 2 la molla si trova alla propria lunghezza di riposo; inoltre nella fase di compressione essa si mantiene sempre con il proprio asse in direzione orizzontale. Ricordate che la compressione è definita come differenza tra lunghezza di riposo e lunghezza "attuale" della molla]

a) Supponendo che **il carrello 2 sia inchiodato sulla strada** (esso non si può muovere!), quanto vale la compressione massima Δ della molla?
Δ = …………………………………… ~ ………… m $(2mgh/k)^{1/2} = 7.0\text{x}10^{-2}$ m [nel processo si conserva evidentemente l'energia meccanica, dato che gli attriti sono trascurabili. Scegliendo come configurazione iniziale quella in cui il carrello si trova fermo in coppa al piano inclinato e come finale quella in cui si verifica la massima compressione, e quindi il carrello è di nuovo istantaneamente fermo, si deve avere $\Delta U = 0$, dove alla variazione di energia potenziale contribuiscono la forza peso, con un termine $\Delta U_G = -m_1gh$, e la forza elastica della molla "respingente", con un termine $\Delta U_{ELA} = (k/2)\Delta^2$, da cui la soluzione]

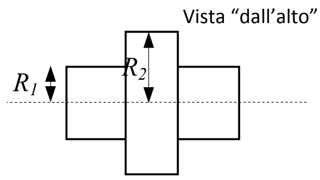
b) Supponendo invece che **il carrello 2 sia libero di muoversi** con attrito trascurabile (e sia inizialmente fermo), quanto vale la compressione massima Δ' della molla? [Spiegate per bene, in brutta, il procedimento usato]
Δ' = …………………………………… ~ ………… m $(8mgh/(5k))^{1/2} \sim 6.3\text{x}10^{-2}$ m [anche in questo caso si conserva l'energia meccanica **complessiva** del sistema dei due carrelli che interagiscono tramite la molla. Stavolta, però, è evidente che la condizione di massima compressione **non** si realizza quando il carrello 1 è fermo. Infatti dopo non appena la molla comincia a comprimersi il carrello 2 si mette in movimento. La compressione raggiunge il suo valore massimo nell'istante in cui i due carrelli hanno la stessa velocità (diversa da zero!): infatti un attimo prima il carrello 1 si sta avvicinando al carrello 2, e dunque $v_1 > v_2$, mentre un attimo dopo il carrello 2 si sta allontanando dal carrello 1, e dunque $v_2 > v_1$. All'istante di massima compressione deve allora essere $v_1 = v_2 = v$, cioè la velocità **relativa** dei due carrelli deve essere nulla (per chi ricorda le descrizioni, in questa fase l'urto tra i due carrelli è completamente anelastico). Il sistema dei due carrelli è isolato lungo la direzione orizzontale, dato che in questa direzione non agiscono forze esterne. Di conseguenza in questa direzione si conserva la quantità di moto totale, cioè $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1+m_2)v$ è costante. Essa deve essere pari al valore iniziale, che, essendo il solo carrello 1 in movimento, è m_1v_0 , dove v_0 è la velocità del carrello 1 nel tratto orizzontale. Ragionando di conservazione di energia meccanica per il solo carrello 1 e nella sola fase di discesa sul piano inclinato, si ha facilmente $v_0 = (2gh)^{1/2}$. Si ottiene quindi $v = (m_1/(m_1+m_2))v_0 = v_0/5$, dove è stata usata la relazione tra le masse citata nel testo. La conservazione dell'energia meccanica complessiva si scrive: $0 = \Delta E_k + \Delta U$, dove $\Delta U = -m_1gh+(k/2)\Delta'^2$, come scritto nella risposta al quesito precedente, mentre $\Delta E_k = (m_1/2)v_1^2+(m_2/2)v_2^2 = ((m_1+m_2)/2)v^2 = (5/2)mv^2 = mv_0^2/10 = mgh/5$, dove abbiamo tenuto conto delle affermazioni ottenute in precedenza. Mettendo tutto insieme si ottiene la risposta: è ovvio che la compressione della molla respingente è in questo caso minore rispetto a quanto trovato nel punto precedente, dato che parte dell'energia viene presa dal movimento dei carrelli!]

c) Quanto vale, in modulo, la massima **accelerazione relativa** $a_{REL,MAX}$ dei due carrelli nella fase di compressione della molla? [Considerate il carrello 2 libero di muoversi come nel punto b). Ricordate che l'accelerazione relativa è, in modulo, $a_{REL}=|a_2\text{-}a_1|$: pensate al fatto che i due carrelli, nella fase di compressione della molla, formano un **sistema** di due oggetti che interagiscono tramite la molla, altrimenti non ne venite a capo…]
$a_{REL,MAX}$ = …………………………………… ~ ………. m/s^2 $5k\Delta'/(4m) \sim 16$ m/s^2 [in un sistema di due oggetti interagenti attraverso una forza interna F_{INT} l'accelerazione relativa si esprime $a_{REL} = F_{INT}/\mu$, con μ **massa ridotta** del sistema, tale che $1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2 = 5/(4m)$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la relazione tra le masse data nel testo. La forza di interazione è la forza elastica esercitata dalla molla (evidentemente diretta orizzontalmente), il cui modulo è $k\Delta$. Forza di interazione e quindi accelerazione relativa sono massime quando la compressione è massima, cioè quando essa vale Δ' determinato sopra. Da qui la soluzione]

d) Dopo aver raggiunto (istantaneamente) la compressione massima, la molla tende a riallungarsi e i due carrelli finalmente si separano. Si osserva che il carrello 1 risale lungo il piano inclinato fino a una certa quota h' (misurata rispetto alla quota del tratto orizzontale). Quanto vale h'? [Considerate anche per questa domanda il carrello 2 libero di muoversi come per i punti b) e c) e osservate che, quando i due carrelli si sono separati, la molla si trova alla propria lunghezza di riposo. Supponete che la separazione avvenga nel tratto orizzontale del percorso]
h' = …………………………………… = ………. m $9h/25 = 1.8$ m [cominciamo con l'osservare che, quando si trova alla sua quota massima nella fase di risalita sul piano inclinato, il carrello 1 è istantaneamente fermo. Poi osserviamo che in questo stesso istante il carrello 2 si muove con una certa velocità v_2' , che tra breve determineremo. Visto che gli attriti continuano a essere trascurabili, possiamo

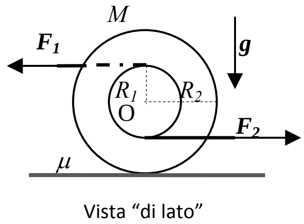
scrivere la conservazione dell'energia meccanica **complessiva**, considerando sempre come istante iniziale quello in cui il carrello 1 si trovava fermo in cima al piano inclinato: $0 = \Delta E_k + \Delta U$, dove stavolta ΔU è solo dovuta alla variazione di quota del carrello 1, essendo la molla alla propria lunghezza di riposo sia all'"inizio" che alla "fine", per cui $\Delta U = m_1 g(h-h')$. Inoltre $\Delta E_k = (m_2/2)v_2'^2$, dato che solo il carrello 2, inizialmente fermo, viene a muoversi nell'istante considerato. Di conseguenza $h' = h-(m_2/m_1)v_2'^2/(2g) = h-2v_2'^2/g$, dove abbiamo usato la relazione tra le masse. Per valutare v_2' notiamo che esso risulta da un processo di urto tra il carrello 1, che si muove a velocità v_0 (determinata alla risposta al punto b)), e il carrello 2, inizialmente fermo. In questo processo **non c'è** variazione di energia potenziale: infatti le quote non cambiano (l'urto avviene nel tratto orizzontale del percorso) e la molla ha lunghezza di riposo sia all'inizio che alla fine del processo. In sostanza, quindi, si tratta di un urto che si può catalogare come completamente elastico (notate: prima, quando la molla era alla massima compressione, l'urto era anelastico, ora, che abbiamo dato tempo e modo alla molla di ridistendersi alla sua lunghezza di riposo, l'urto è come se fosse elastico!), cioè si conservano quantità di moto e energia cinetica **complessive**. Le equazioni che descrivono queste conservazioni suonano come segue. Per la quantità di moto si ha $m_1v_0 = m_1v_1'+m_2v_2'$, ovvero $v_1' = v_0-4v_2'$, dove abbiamo indicato con v_1' la velocità del carrello 1 nell'istante considerato (quando esso si trova ancora sul tratto orizzontale e si è completamente separato dal carrello 2) e usato la relazione tra le masse. Per l'energia cinetica si ha $(m_1/2)v_0^2 = (m_1/2)v_1'^2+(m_2/2)v_2'^2$, ovvero $v_2'^2 = (v_0^2-v_1'^2)/4$. Sostituendo l'espressione di v_1' che viene dalla conservazione della quantità di moto si ha l'equazione algebrica di secondo grado $0 = 5v_2'^2-2v_0v_2'^2$, che, escludendo la soluzione banale e non fisica $v_2' = 0$, ha come soluzione $v_2' = 2v_0/5$. Sostituendo nell'equazione prima predisposta si ottiene $h' = h-8v_0^2/(25g)$, che, introducendo l'espressione di v_0 trovata alla soluzione del punto b), fornisce la soluzione] valgono le conservazioni nella forma scritta per la risposta al punto a). Notiamo però che nell'istante considerato il manicotto, muovendosi in direzione verticale **rispetto alla guida**, ovvero al carrello, ha componente orizzontale della sua velocità pari a quella del carrello, cioè $v_X'' = V''$. Dovendo valere anche la conservazione della quantità di moto, deve necessariamente essere $V'' = 0$]

2. Una strana ruota usata in un gioco folcloristico con figuranti in costume è costruita unendo in un solo corpo tre cilindri **pieni e omogenei** di massa complessiva M. Come rappresentato in figura (vista "dall'alto"), i tre cilindri sono saldati in modo da essere coassiali fra loro; i due cilindri "esterni" sono identici fra loro, portano ognuno una massa pari a un quarto di quella totale della ruota e hanno un raggio $R_1 = R$. Il cilindro "centrale" ha invece raggio doppio, $R_2 = 2R$.



a) Come si scrive il momento di inerzia I della ruota per rotazioni attorno al suo asse geometrico? [Non ci sono valori numerici: nell'espressione devono comparire le grandezze rappresentate dai simboli M e R]
I = ……………………….. $5MR^2/4$ [essendo coassiali tra loro, e giacendo il centro di massa di ognuno dei cilindri sull'asse geometrico del sistema, è sufficiente sommare tra loro i momenti di inerzia dei tre cilindri, ognuno calcolato per rotazioni attorno al proprio asse. Genericamente si ha $I = (m/2)r^2$. Dunque, tenendo conto delle informazioni del testo, si ha $I = 2((M/4)/2)R_1^2+((M/2)/2)R_2^2$, da cui la soluzione]

b) Nell'impiego per il gioco folcloristico, due funi inestensibili e di massa trascurabile vengono avvolte sui due cilindri "esterni" (nello stesso verso). Queste funi possono srotolarsi senza strisciare sulla superficie esterna dei cilindri, per intenderci come per una puleggia "ordinaria". Quindi la ruota viene appoggiata su una superficie orizzontale scabra, dotata di coefficiente di attrito statico μ. Due figuranti prendono in mano gli estremi delle funi e tirano con tutta la loro forza, facendo in modo che le funi rimangano tese e **orizzontali**. La situazione è schematizzata in figura, dove la ruota è stavolta vista "di lato". Supponete che il figurante di destra sia più nerboruto di quello di sinistra ($F_2 > F_1$) e che si osservi sperimentalmente che la ruota si muove di **rotolamento puro** con il suo centro di massa che si sposta verso la **sinistra** di figura.



Discutete **per bene**, in brutta che direzione e verso ha la forza di attrito $\boldsymbol{F_A}$ che si esercita fra punto di contatto della ruota e piano scabro. [State attenti a considerare **in che modo** le funi sono avvolte sui due cilindri: la situazione è quella rappresentata in figura!]
Discussione su direzione e verso della forza di attrito: ……………………….. la forza di attrito è diretta orizzontalmente e, dovendosi **opporre al moto del punto di contatto della ruota con il piano orizzontale**, è orientata verso la sinistra della figura. Per determinare il verso dell'attrito, che essendo statico (il rotolamento è puro!) deve opporsi al moto "incipiente"del punto di contatto tra ruota e piano scabro, vediamo come si muoverebbe questo punto se l'attrito non ci fosse. Le due forze farebbero entrambe ruotare la ruota in senso antiorario (osservate il momento che esse producono rispetto all'asse!), per cui il punto di contatto si muoverebbe tangenzialmente verso destra. Inoltre, essendo $F_2 > F_1$, ci sarebbe anche un moto di traslazione per il quale il punto di contatto si muoverebbe verso destra. Dunque la forza di attrito è orientata verso sinistra.

c) Scrivete le espressioni delle equazioni del moto di traslazione del centro di massa e di rotazione attorno all'asse geometrico della ruota O (equazioni cardinali) a_{CM} e α , usando un riferimento orizzontale orientato verso la **sinistra** di figura e un riferimento angolare positivo per rotazioni **antiorarie** della ruota attorno al suo asse. [Nelle equazioni del moto devono comparire solo le grandezze rappresentate dai simboli M, F_1, F_2, F_A, R]
a_{CM} = …………………………… $(F_1+F_A-F_2)/M$ [le forze dirette orizzontalmente sono quelle di modulo F_1, F_2, F_A che agiscono nei versi che abbiamo precisato]
α = …………………………… $((F_1+F_2)R_1-F_AR_2)/I = 4(F_1+F_2-2F_A)/(5MR)$ [le tre forze citate sopra sono le uniche che fanno momento. In particolare F_1 e F_2 , che hanno braccio pari a R_1, fanno entrambe ruotare in senso antiorario, positivo per la nostra scelta, la ruota, mentre F_A , che ha braccio R_2 , fa ruotare la ruota in senso orario, negativo]

d) Facoltativamente, discutete per bene, in brutta, quali condizioni occorre porre su μ per avere le condizioni descritte (rotolamento puro) supponendo noti i moduli delle forze applicate, F_1 , F_2 e massa e raggio, M, R , della ruota. [Indicate con g il modulo dell'accelerazione di gravità]

Condizione su μ : ……………………….. Se si impone il rotolamento puro, deve essere $\alpha = a_{CM} / R_2 = a_{CM}/(2R)$. Tenendo conto di questa imposizione si trova un sistema di due equazioni con tre incognite (F_1, F_A, a_{CM}); eliminando l'incognita a_{CM} , si ottiene: $8(F_2+F_1-2F_A)=5(F_1-F_2+F_A)$, ovvero: $21F_A = 3F_1+13F_2$. D'altra parte $F_A \le F_{A,MAX} = \mu N = \mu Mg$, per cui deve essere $\mu \geq (F_1/7 + 13F_2/21)/(Mg)$.

3. Avete un condensatore ad armature piane e parallele le cui armature sono costituite da due dischi sottili di materiale perfettamente conduttore (raggio dei dischi a = 10 cm) posti parallelamente e coassialmente uno di fronte all'altro a una distanza d = 1.0x10^{-4} m (lo spazio tra le armature è vuoto). Le armature sono connesse a un generatore di differenza di potenziale **variabile** nel tempo, spento per $t < 0$ e tale che in un intervallo di tempo Δt = 10 s la differenza di potenziale passa da zero al valore V_0 = 5.0x10^3 V seguendo una funzione **lineare** del tempo. [Usate i valori ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto; notate che l'intervallo di tempo considerato può essere ritenuto sufficientemente lungo da utilizzare le leggi valide nel caso "stazionario"]

a) Quanto vale il lavoro L fatto dal generatore nell'intervallo Δt?

L = …………………………………… = ……… J $\varepsilon_0 \pi a^2 V_0^2/(2d)$ = 3.5x10^{-2} J [il lavoro del generatore serve per caricare il condensatore al punto che la differenza di potenziale tra le armature diventa V_0. Dunque la variazione di energia elettrostatica, ovvero il lavoro del generatore, vale $CV_0^2/2$, con $C = \varepsilon_0 S/d$ $(S=\pi a^2)$, capacità del condensatore ad armature piane e parallele. Fate attenzione: il lavoro del generatore **non** è $q\Delta V$ come scritto da un folto gruppetto di copisti. Poiché la carica (o la differenza di potenziale) cambiano il proprio valore durante la carica, si ottiene quanto scritto prima]

b) Come si esprime la funzione del tempo t che descrive la carica $Q(t)$ accumulata sul condensatore al tempo t generico nell'intervallo $0<t<\Delta t$? [Non usate valori numerici per questa risposta, ma rappresentate le grandezze note del problema con i loro simboli letterali]

$Q(t)$ = …………………………………… $C\, V(t) = (\varepsilon_0 \pi a^2/d)\, V_0 t/\Delta t$ [nella fase di carica di un condensatore la carica segue generalmente la differenza di potenziale imposta dal generatore attraverso un processo in cui compare un tempo caratteristico (pari a RC). In questo problema non si fa cenno a resistenze, per cui si assume che esse siano trascurabili. In queste condizioni la carica sulle armature segue **istantaneamente** la differenza di potenziale (il tempo caratteristico di carica è nullo!). La differenza di potenziale prodotta dal generatore segue l'andamento $V(t) = V_0\, t/\Delta t$, come potete facilmente dedurre da quanto scritto nel testo (e usando i simboli del testo, anche qui schiere di copisti hanno inventato altri simboli…). Per la definizione di capacità si ottiene la risposta]

c) Quanto vale la corrente I erogata dal generatore nell'intervallo $0<t<\Delta t$? [Considerate il valore assoluto della corrente, senza preoccuparvi dell'eventuale segno]

I = …………………………………… = ……….. A $dQ(t)/dt = C\, dV(t)/dt = (\varepsilon_0 \pi a^2/d)\, V_0/\Delta t$ = 1.4x10^{-6} A [la corrente fluisce sulle armature del condensatore per caricarle. L'intensità di questa corrente si ottiene notando che, senza considerare i segni, $I(t) = dQ(t)/dt$. Essa è infatti pari alla quantità di carica fornita al condensatore nell'unità di tempo. Facendo la derivata si ottiene la soluzione che, come si vede, è costante nel tempo]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 12/6/2014 Firma: