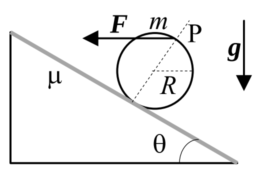
Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE – 24/7/2014

Nome e cognome: ……………………………………………………… **Matricola: ……………**

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Premessa: quello che segue è un esercizio di meccanica del punto. L'unica conoscenza di elettrostatica necessaria per la soluzione è la seguente (la conoscete benissimo, ma vi viene ricordata a scanso di equivoci): tra due cariche elettriche puntiformi q e Q poste a distanza relativa r si instaura una forza diretta lungo la congiungente tra le due cariche e il cui modulo si scrive $F_{ELE} = \kappa\, qQ/r^2$.
Un semplicissimo (ed irrealistico) modello "planetario" di atomo di idrogeno prevede che un protone di carica Q = 1.6x10^{-19} C sia **fisso** nello spazio e che attorno ad esso possa ruotare, su un'orbita **circolare**, un elettrone di carica $q = -Q$ e massa m = 9.0x10^{-31} kg. [Usate il valore κ = 9.0x10^{9} Nm^2/C^2 per la costante della forza elettrica; trascurate ogni effetto di massa (forza peso) e attrito]
   a) Sapendo che il raggio dell'orbita vale R = 5.0x10^{-11} m, e supponendo che il moto sia circolare **uniforme**, quanto vale la velocità angolare ω con cui ruota l'elettrone?
   ω = ……………………………………~ ……… rad/s $(\kappa Q^2/(mR^3))^{1/2}$ ~ 4.5x10^{16} rad/s [poiché l'elettrone compie un'orbita circolare, esso deve risentire di un'accelerazione centripeta che in modulo si esprime $a_C = \omega^2 R$. L'unica forza che agisce sull'elettrone è la forza elettrica generata dalla carica puntiforme Q, che ha carattere attrattivo e dunque è « centripeta » e si esprime, in modulo : $F_{ELE} = \kappa Q^2/R^2$. La soluzione si trova imponendo $F_{ELE}=ma_c$]
   b) Se il raggio dell'orbita raddoppia per effetto di una qualche perturbazione "esterna", cioè diventa $R' = 2R$ = 1.0x10^{-10} m, quanto vale la variazione di energia potenziale elettrostatica, ΔU_E? [Potrebbe farvi comodo rammentare la seguente regola di integrazione indefinita per una variabile generica ξ: $\int (1/\xi^2)\, d\xi = -1/\xi$]
   ΔU_E = ……………………………………....~ .... J $\kappa\, Q^2(1/R' - 1/R) = -\kappa\, Q^2/(2R)$ ~ -2.3x10^{-18} J [la forza elettrica è conservativa e dunque $\Delta U_E = -L_E = -\int_R^{R'} \mathbf{F}_E \cdot d\mathbf{r} = \int_R^{R'} F_E\, dr$, dove abbiamo « risolto » il prodotto scalare notando che forza elettrica e spostamento sono **antiparalleli** (occhio : abbiamo anche cambiato segno all'espressione proprio per tenere conto di questo fatto e, per evitare confusioni, scriveremo la forza come positiva, secondo quanto abbiamo fatto anche in precedenza) : infatti la forza è attrattiva mentre lo spostamento $d\mathbf{r}$ è diretto in modo da rappresentare un allontanamento tra le due cariche. Risolvendo l'integrale e tenendo in debito conto degli estremi di integrazione si ottiene la soluzione, il cui segno è giustamente negativo, visto che all'aumentare della distanza tra le due cariche (che si attraggono tra loro) l'energia diminuisce]
   c) E quanto vale la variazione di energia cinetica ΔE_k?
   ΔE_k = ……………………………………....~ .... J $\Delta U_E/2$ ~ -1.2x10^{-18} J [nella nuova orbita di raggio R' l'elettrone si trova a muoversi con velocità angolare $\omega' = (\kappa Q^2/(mR'^3))^{1/2}$, dove abbiamo usato la relazione trovata al punto a), che deve essere valida anche per il nuovo raggio (stiamo sempre supponendo orbite circolari !). La variazione di energia cinetica è allora $\Delta E_k = (m/2)R'^2\omega'^2 - (m/2)R^2\omega^2 = (m/2)(\kappa Q^2/m)(1/R' - 1/R) = \Delta U_E/2$]
   d) Come si modificherebbe la risposta al punto a) nel caso, un po' più realistico, di protone libero e non fisso nello spazio? Discutete brevemente e in modo chiaro. [Ricordate che la massa del protone vale M = 1.7x10^{-27} kg , circa 1800 volte la massa dell'elettrone, m]
   Discussione: ……………………………………..... Se si supponesse il protone libero di muoversi, dovremmo considerare il sistema cositutito da protone ed elettrone. In questo sistema l'accelerazione centripeta è un'accelerazione **relativa**, cioè è quella dell'elettrone rispetto al protone. Dunque la forza di attrazione elettrostatica tra le due cariche sarebbe una forza **interna**. L'equazione del moto relativo recita $\mathbf{a}_{rel} = \mathbf{F}_{int}/\mu$, con μ massa ridotta del sistema, tale che $1/\mu = 1/m + 1/M$. Dunque la relazione scritta nella soluzione al punto a) diventerebbe $F_{ELE} = \mu a_C$. Tuttavia $\mu = m$ a meno di correzioni molto piccole, visto che la massa del protone è molto maggiore di quella dell'elettrone. Di conseguenza il risultato numerico trovato al punto a), espresso con due cifre significative, sarebbe ancora corretto.

2. Un cilindro **pieno e omogeneo** di massa m = 4.0 kg e raggio R = 50 cm si trova su un piano inclinato **scabro** (coefficiente di attrito μ = 1/2 = 0.50) che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Sulla superficie del cilindro, al punto P indicato in figura, è applicata una forza $\mathbf{F}$ (un ditino che preme), di direzione orizzontale, verso come in figura e modulo **incognito**. Sotto l'azione di questa forza il cilindro è in **equilibrio**. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità. Ricordate che $cos(\pi/6)$ = 3$^{1/2}$/2, con 3$^{1/2}$ ~ 1.7 e $sin(\pi/6)$ = 1/2]



   a) Quanto vale il modulo F_0 della forza $\mathbf{F}$? [Il pedice "0" si usa per indicare che questo è il modulo della forza in queste condizioni di equilibrio!]
   F_0 = ……………………………..~.......... N $(mgtg\theta)/2$ ~ 11 N [il cilindro deve trovarsi in equilibrio rotazionale e traslazionale. L'equilibrio rotazionale implica che la somma dei momenti delle forze rispetto a un qualche polo (che si può scegliere liberamente, visto che l'equilibrio non può dipendere dalla scelta del polo) sia nulla. La scelta più furba consiste nello scegliere il polo sul punto di contatto tra cilindro e piano inclinato. Le forze che hanno un momento non nullo rispetto a questo polo sono la forza $\mathbf{F}_0$, che tende a far ruotare il cilindro in senso antiorario, e la forza peso (applicata al centro di massa, cioè al centro del cilindro), che invece tende a far ruotare il cilindro in senso orario. Il braccio della forza $\mathbf{F}_0$, cioè la distanza tra polo e retta di applicazione della forza, vale $2Rcos\theta$, come suggerito da una semplice costruzione geometrica. Il braccio della forza peso è invece $Rsin\theta$. Uguagliando i

moduli dei due momenti delle forze si ottiene la risposta. Ovviamente alla stessa risposta si giunge anche con un'altra scelta del polo, per esempio posto al centro del cilindro. La scelta fatta qui però è più furba perché permette di disinteressarsi della forza di attrito]

b) Che direzione e verso ha, e qual è il modulo della forza di attrito F_A? [Spiegate per bene in brutta il ragionamento seguito e … **ponetevi delle domande a cui rispondere**!]

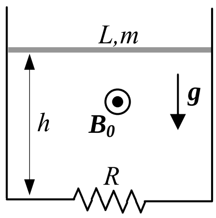
Direzione e verso: …………………………….. La forza di attrito, che è ovviamente statica visto che il cilindro è in equilibrio (fermo!), deve opporsi al moto "incipiente" del punto di contatto del cilindro con il piano inclinato. La sua direzione è quindi ovviamente parallela al piano inclinato. Il verso si può stabilire vedendo quale sarebbe il moto del punto di contatto in assenza dell'attrito. A causa della forza ***F*** il cilindro ruoterebbe in senso orario, cioè il punto di contatto si muoverebbe verso il basso del piano, per cui la forza di attrito deve essere diretta **verso l'alto** del piano.

F_A = ……………………………..= .... N $(mg\sin\theta)/2 = 9.8$ N [il modo più immediato per ottenere la risposta è probabilmente quello di esaminare l'equilibrio rotazionale rispetto al centro di massa, cioè prendendo come polo il centro del cilindro. Il momento della forza $\boldsymbol{F_0}$ si scrive in questo caso $F_0R\cos\theta = MgR\sin\theta/2$, dove abbiamo sostituito il modulo di F con il risultato trovato sopra, mentre quello della forza di attrito è F_AR. Uguagliando si trova la soluzione, che si ottiene anche esaminando l'equilibrio traslazionale del centro di massa. La domanda che vi dovete porre a questo punto è se il coefficiente di attrito dato nel testo è sufficiente per determinare il valore ottenuto, cioè se $F_A \le F_{A,MAX}$, con $F_{A,MAX} = \mu N$. Nelle condizioni dell'esercizio è facile osservare che $N = mg\cos\theta + F_0\sin\theta = mg(\cos\theta + ((\sin^2\theta)/2)/\cos\theta) = (mg/\cos\theta)(\cos^2\theta + (\sin^2\theta)/2)$. Dunque occorre verificare numericamente che $\mu \geq \sin\theta\cos\theta/(2(\cos^2\theta + (\sin^2\theta)/2))$. Questo è effettivamente verificato e quindi l'equilibrio è possibile]

c) Immaginate ora che la forza ***F*** aumenti il proprio modulo rispetto al valore di equilibrio F_0. In queste condizioni l'equilibrio non c'è più e il cilindro trasla, ruotando, verso l'alto del piano inclinato. Quanto vale il modulo massimo F_{MAX} della forza che garantisce che il cilindro **cominci** a muoversi di rotolamento puro? [Supponete che il cilindro parta da fermo]

F_{MAX} = ……………………………..~ .... N $mg(3\mu\cos\theta - \sin\theta)/(\cos\theta - 3\mu\sin\theta) = mg(3\sqrt{3}/2 - 1)/(\sqrt{3} - 3/2) \sim 2.7\times10^2$ N [il testo richiede di esaminare la dinamica nell'istante "iniziale", cioè quando la geometria del problema è la stessa della situazione di equilibrio (gli angoli sono quelli che abbiamo considerato prima). L'equazione del moto rotazionale si scrive, usando come polo il centro di massa, $\alpha = (FR\cos\theta - F_AR)/I$, con $I = (mR^2)/2$ momento di inerzia di un cilindro pieno omogeneo rispetto al centro di massa. L'equazione del moto traslazionale del centro di massa, scritta rispetto a un asse parallelo al piano e orientato verso l'alto, si scrive $a_{CM} = (F_A + F\cos\theta - mg\sin\theta)/m$, dove abbiamo usato la considerazione sul verso della forza di attrito già fatta in precedenza. In condizioni di rotolamento puro deve essere $a_{CM} = \alpha R$. Si crea così un sistema di tre equazioni algebriche e quattro incognite (F, F_A, α, a_{CM}), che, risolto rispetto all'incognita F_A, stabilisce il valore che la forza di attrito deve avere affinché il moto sia di rotolamento puro **in funzione del valore di *F***. Si ottiene infatti $F_A = (F\cos\theta + mg\sin\theta)/3$. La forza di attrito per il piano considerato è $F_A \le \mu N = \mu(mg\cos\theta + F\sin\theta)$. Combinando queste due espressioni si ottiene la seguente disequazione: $F(\cos\theta - 3\mu\sin\theta) \le mg(3\mu\cos\theta - \sin\theta)$, da cui la soluzione]

3. Una barretta di lunghezza L = 10 cm e massa m = 0.10 kg, fatta di materiale ottimo conduttore, può scorrere con **attrito trascurabile** in direzione verticale mantenendosi in contatto elettrico con due guide ottime conduttrici, fisse, rigide e disposte verticalmente, collegate tra loro da un resistore R = 0.10 ohm come indicato in figura. In questo modo la barretta costituisce il "lato mobile" di una "spira conduttrice" la cui resistenza elettrica è R. Un campo magnetico esterno, uniforme e costante, insiste sulla regione di interesse. Tale campo magnetico ha modulo B_0 = 1.0 T, direzione ortogonale al foglio e verso uscente da esso (vedi figura). Inizialmente la sbarretta si trova ferma a una certa quota h e da qui viene lasciata scendere con velocità iniziale nulla. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Per effetto del moto di discesa della barretta, nella spira con lato mobile viene indotta una corrente. Discutete **per bene**, in brutta, che verso ha tale corrente e spiegate perché.

Discussione: …………………………… La corrente fluisce in senso antiorario rispetto alla figura, e la risposta può essere determinata in due modi equivalenti. Si può infatti fare uso della forza di Lorentz che, mettendo in movimento le cariche elettriche (positive, la corrente si suppone fatta di cariche positive!) trascinate verso il basso all'interno della sbarretta ed essendo determinata in verso dalla regola della mano destra, indica che sulla barretta ci deve essere un movimento di cariche verso la sinistra della figura, che corrisponde a dire che c'è una corrente che fluisce in verso antiorario. In alternativa si può fare riferimento alla legge di Lenz (o Faraday-Lenz, o equazione di Maxwell in forma intergale per la circuitazione del campo elettrico). Questa "legge" afferma che il sistema reagisce alle perturbazioni creando un campo magnetico indotto la cui variazione di flusso si oppone alla variazione di flusso del campo magnetico esterno. Attribuendo come positivo il segno del flusso del campo magnetico esterno attraverso la superficie della spira, si ha che tale flusso diminuisce a causa della riduzione dell'area operata dalla discesa della barretta. Il campo magnetico indotto deve allora avere **lo stesso verso** del campo magnetico esterno, in modo da compensarne la riduzione del flusso. Per la regola della mano destra in versione "ciao ciao" la corrente che crea tale campo indotto deve avere verso antiorario, come già anticipato

b) Detta v la velocità della barretta (misurata rispetto a un asse verticale orientato verso il basso), come si esprime la potenza $P(v)$ "dissipata" per effetto Joule dalla resistenza R? [Per rispondere a questa domanda dovete considerare "nota" la velocità v e limitarvi a scrivere la **funzione** di v che lega matematicamente tale velocità alla potenza "dissipata"; non usate valori numerici!]

$P(v)$ = …………………………………. $(B_0L)^2v^2/R$ [anche qui si possono seguire due strade, quella microscopica attraverso la forza di Lorentz, che si lascia per esercizio, e quella attraverso Faraday, che usiamo qui. La forza elettromotrice (la circuitazione del campo elettrico sulla spira, ovvero la differenza di potenziale ai capi della barretta) è data da $fem = -d\Phi(\boldsymbol{B_0})/dt$, dove il flusso del campo magnetico esterno è calcolato attraverso l'area della spira. Poiché il campo è uniforme e diretto ortogonalmente all'area della spira, si ha $\Phi(\boldsymbol{B_0}) = B_0A$, con A =

Ly area della spira. La coordinata y indica l'"altezza" della barretta (l'altezza del rettangolo di base L che costituisce l'area della spira). Derivando rispetto al tempo e notando che $dy/dt = v$, velocità della barretta, si ha $I(v) = B_0Lv/R$, dove abbiamo usato $I = fem/R$ per la legge di Ohm e tolto il segno negativo perché l'intensità di corrente è definita come una grandezza positiva (l'informazione sul segno equivale a quella del verso che abbiamo determinato alla risposta precedente). A questo punto la potenza $P(v)$ si scrive come $RI^2(v)$, da cui la risposta]

c) Come si scrive l'accelerazione a, ovvero l'equazione del moto, della barretta? [Usate un riferimento verticale orientato verso il basso e scrivete una **funzione** dei parametri letterali del problema, senza usare valori numerici]

a = ... $g-((B_0L)^2/(mR))v$ [la barretta è percorsa da una corrente I non costante (dipende da v!); a causa della presenza del campo magnetico esterno $\mathbf{B_0}$ si determina una forza su tale corrente, che quindi si trasferisce alla barretta influenzandone il moto. Su un elementino $d\mathbf{l}$ di lunghezza della barretta, orientato come la corrente (dunque verso la sinistra di figura), la forza si esprime come $d\mathbf{F} = I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B_0}$. La regola della mano destra stabilisce che tale forza è diretta verticalmente verso l'alto, dunque in direzione opposta al moto. Il valore di tale forza può essere ottenuto integrando l'espressione precedente sulla barretta. Dato che il campo magnetico è uniforme ed uniforme si suppone anche l'intensità di corrente nella barretta, l'integrazione fornisce, in modulo, $F = B_0IL = ((B_0L)^2/R)v$, dove abbiamo usato l'espressione di $I(v)$ trovata in precedenza. Da qui la soluzione, in cui il segno negativo è coerente con la scelta del riferimento e, ovviamente, compare anche l'accelerazione costante $\boldsymbol{g}$, che certamente agirà sulla barretta (presa in segno positivo per la scelta del riferimento)]

d) Discutete per bene, in brutta, per quale motivo la barretta raggiunge nel suo moto una velocità massima v_{MAX} e determinatene il valore.

Discussione: .... L'equazione del moto scritta in precedenza è quella del moto di un oggetto puntiforme sottoposto a accelerazione costante e a una forza di attrito viscoso (del tipo $-\beta v$). Essa è formalmente analoga a quella di un paracadutista che si lancia, con velocità iniziale nulla, nell'aria, che è un fluido (debolmente) viscoso. In queste circostanze la velocità aumenta esponenzialmente fino a raggiungere, asintoticamente, una velocità limite, che qui rappresenta la velocità massima. La velocità limite si raggiunge quando l'accelerazione si annulla, cioè per $v = mRg/(B_0L)^2$. A molti di voi, la comparsa di un attrito viscoso nel moto della barretta non sembrerà affatto peregrina: infatti, come sapete bene (cosiddetto modello di Drude), il passaggio di corrente attraverso la resistenza dà luogo a un fenomeno molto simile, dal punto di vista microscopico, a quello che è alla base dell'attrito viscoso. Su questa base si può giungere alla soluzione del problema ragionando in termini di potenza "dissipata" per effetto Joule della resistenza. Ragionando in termini di bilancio energetico, la potenza $P(v) = RI^2 = ((B_0L)^2/R)v^2$ deve essere uguale al termine $-dE_{MECC}/dt$ che rappresenta la perdita di energia meccanica della barretta durante il moto. Tenendo conto che l'energia meccanica può essere espressa come $E_{MECC}=(m/2)v^2-mgy +costante$, dove riconoscete la somma di energia cinetica e (differenza) di energia potenziale gravitazionale, si ha $dE_{MECC}/dt = mva-mgv$. Uguagliando questa espressione con la potenza dissipata (e mettendo il segno giusto!), con un po' di algebra si ri-ottiene l'equazione del moto scritta in precedenza.

v_{MAX} = ... = ……… m/s $mRg/(B_0L)^2$ = 9.8 m/s [vedi sopra]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 24/7/2014 Firma: