Corso di Laurea Ing. EA – ESAME DI FISICA GENERALE – 18/9/2014

Nome e cognome: …………………………………………………….   Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un manicotto (puntiforme!) di massa M = 1.0 kg è vincolato a muoversi in direzione verticale da una guida (un tondino rigido e fisso che ci passa attraverso). L'attrito è trascurabile. Il manicotto è attaccato a una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 98 N/m e lunghezza a riposo L_0 = 50 cm , il cui altro estremo è vincolato a un pavimento orizzontale rigido. Inizialmente il manicotto è fermo in equilibrio. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; per lo schema potete fare riferimento alla figura riportata in seguito, che contiene però anche le informazioni necessarie alla soluzione del punto c.]

   a) Quanto vale, in queste condizioni di equilibrio, la compressione ΔL_{ini} della molla? [Per compressione si intende la differenza tra lunghezza a riposo e lunghezza attuale della molla]

   ΔL_{ini} = ……………………………… = ……….. m Mg/k = 0.10 m   [il manicotto è in equilibrio, dunque la forza peso mg diretta verso il basso deve essere bilanciata dalla forza elastica $k\Delta L_{ini}$ diretta verso l'alto. Da qui la soluzione]

   b) A un certo istante il manicotto viene urtato da un proiettile (che **non** vi rimane conficcato!). In seguito all'urto il manicotto acquista una velocità diretta verso il basso di modulo incognito V_{ini} . Nel moto successivo, si osserva che il manicotto si arresta nell'istante in cui la compressione della molla vale $\Delta L' = 2\Delta L_{ini}$ determinato sopra. Quanto vale V_{ini}?

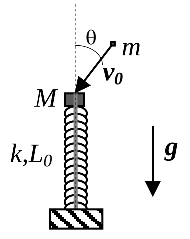
   V_{ini} = ……………………………… ~ ……….. m/s $(3(k/M)\Delta L_{ini}^2 - 2g\ \Delta L_{ini})^{1/2} = g(M/k)^{1/2}$ ~ 1.0 m/s

   [essendo l'attrito trascurabile, si conserva l'energia meccanica: $0 = \Delta E_k+\Delta U_G+\Delta U_{ELA}$, dove si sono tenute in debito conto le variazioni di energia dovute alla forza peso e alla forza elastica. Poiché nell'istante considerato il manicotto si ferma, è $\Delta E_k = -(M/2)V_{ini}^2$. Inoltre nel processo il manicotto si abbassa per un tratto $\Delta h = L_{ini} - L_{fin}$, con L_{fin} e L_{ini} lunghezza della molla alla fine e all'inizio. D'altra parte è $L_{fin} = L_0 - \Delta L_{fin}$ e, analogamente, $L_{ini} = L_0 - \Delta L_{ini}$, per cui $\Delta h = \Delta L_{ini}$ (affermazione molto banale, a cui si poteva arrivare subito!). Quindi $\Delta U_G = -Mg\ \Delta L_{ini}$ (il segno è corretto, come potete facilmente determinare). Infine conviene scrivere $\Delta U_{ELA} = U_{ELA,fin}-U_{ELA,ini}$. L'**energia** elastica di una molla estesa o compressa per un tratto ΔL si scrive, come sapete, $U_{ELA} = (k/2)\Delta L^2$. Dunque $\Delta U_{ELA} = (k/2)(\Delta L_{fin}^2-\Delta L_{ini}^2) = (3k/2)\Delta L_{ini}^2$. Mettendo tutto assieme, usando la risposta precedente e risolvendo si ottiene la soluzione]

   c) Quanto vale l'intervallo di tempo Δt che intercorre tra l'istante in cui il manicotto comincia a muoversi e quello in cui si arresta (istantaneamente e per la prima volta)? [Spiegate **bene**, in brutta, i ragionamenti che fate!]

   Δt = ……………………………… ~ ……….. s $\pi(M/k)^{1/2}/2$ ~ 0.16 s   [il moto del manicotto è armonico. Infatti la sua equazione del moto, scritta rispetto a un asse verticale Y diretto verso il basso, è: $a = g - (k/M)(y-L_0)$, dove y rappresenta la coordinata del manicotto. Questa equazione è quindi della forma $a = -(k/M)y + C$, con C costante. Il moto è quindi di oscillazione armonica, con legge oraria $y(t) = A\cos(\omega t+\phi)+y_{EQ}$ e legge oraria della velocità $v(t) = -\omega A\sin(\omega t+\phi)$, con $y_{EQ} = Mg/k+L_0$ posizione di equilibrio e $\omega = (k/M)^{1/2}$ .. Le costanti A e ϕ dipendono dalle condizioni iniziali: nel problema considerato, queste presuppongono che all'istante iniziale la posizione sia $y_0 = y_{EQ}$ e che la velocità iniziale sia V_{ini} (diretta verso il basso e quindi positiva nel sistema che stiamo considerando). Si ottiene facilmente $\phi = \pi/2$ e $A = -V_{ini}/\omega$. L'istante considerato, in cui il manicotto si arresta per la prima volta, è t' tale che $v(t') = 0$. Di conseguenza deve essere $\omega t' = \pi/2$ (e ulteriori infiniti valori,ma qui prendiamo il primo degli istanti di arresto), cioè $t' = \pi/(2(k/M)^{1/2})$, da cui la soluzione (l'istante iniziale è t_0 = 0). Notate che l'intervallo di tempo così trovato corrisponde anche a $T/4$ con $T = 2\pi/\omega$ periodo dell'oscillazione. Un quarto di periodo è infatti necessario perché un oscillatore armonico, che parte dalla posizione di equilibrio, raggiunga la posizione di arresto istantaneo, in cui inverte il verso di moto]

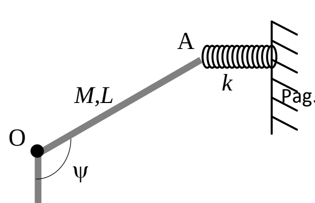
   d) Sapendo che il proiettile (puntiforme!) ha massa $m = M/5$ = 0.20 kg e che esso incide sul manicotto formando un angolo $\theta = \pi/4$ rispetto alla verticale, quanto vale la velocità v_0 con cui esso urta sul manicotto? [Supponete che l'urto sia **elastico** e che avvenga in un tempo così breve che la molla non vari la sua compressione; inoltre immaginate di sapere che la componente **orizzontale** della velocità del proiettile non varia tra prima e dopo l'urto, e che la molla non è in grado di produrre forze impulsive]



   v_0 = ……………………………… = ……….. m/s $3(2^{1/2})V_{ini} = 3(2^{1/2})g(M/k)^{1/2}$ = 4.2 m/s

   [il processo che stiamo considerando è un urto **elastico** tra proiettile e manicotto. Le informazioni del testo portano a concludere che in questo urto si conserva la quantità di moto complessiva del sistema in tutte le direzioni. Infatti non ci sono forze esterne impulsive in direzione verticale, mentre l'affermazione relativa alla componente orizzontale della velocità del proiettile implica, essendo il manicotto sempre vincolato a muoversi in direzione verticale, che c'è conservazione della quantità di moto totale anche in direzione orizzontale. Per componenti, queste equazioni di conservazione si scrivono $mv_{0X} = mv'_x$ (con v' velocità del **proiettile** subito dopo l'urto), da cui $v'_X = v_{0X} = v_0/2^{1/2}$, e $mv_{0Y} = mv'_Y + MV_{ini}$, ovvero, usando la relazione fra le masse, $v_Y' = v_{0Y} - 5V_{ini}$, dove V_{ini} è la velocità che il manicotto acquista subito dopo l'urto (usata e determinata già prima!). Inoltre vale la conservazione dell'energia cinetica (urto elastico!), per cui $(m/2)v_0^2 = (m/2)v'^2+(M/2)V_{ini}^2$, ovvero, ricordando che la velocità è un vettore e usando la relazione tra le masse: $v_0^2 = v_X'^2+v_Y'^2+5V_{ini}^2$ .Sostituendo le espressioni di v_X' e v_Y' trovate con la conservazione della quantità di moto si ottiene: $v_0^2 = v_{0X}^2+v_{0Y}^2-10v_{0Y}V_{ini} + 25V_{ini}^2 + 5V_{ini}^2$ (notate che abbiamo anche sviluppato un binomio quadrato!). Si arriva all'equazione algebrica di secondo grado: $10v_{0Y}V_{ini} = 30V_{ini}^2$. Scartando la soluzione banale V_{ini} = 0 , che significa che il proiettile non ha centrato il manicotto, l'altra soluzione è $V_{ini} = v_{0Y}/3$. D'altra parte, per motivi geometrici, è anche $v_{0Y} = v_0/2^{1/2}$, da cui la soluzione]

2. Una squadretta è realizzata saldando assieme, testa a testa, due sbarrette sottili e uniformi di metallo, ognuna di massa M = 0.50 kg e lunghezza L = 20 cm. L'angolo tra gli assi delle



sbarrette vale $\psi = 2\pi/3$, ovvero 120 gradi. La squadretta è montata come rappresentato in figura: essa è libera di ruotare con attrito trascurabile su un piano verticale, essendo imperniata nel punto O di figura (posto nella giunzione tra le due sbarrette che compongono la squadretta). Un estremo della squadretta, marcato con A in figura, è attaccato all'estremità di una molla con costante elastica k = 50 N/m, il cui altro estremo è vincolato a una parete rigida verticale. Nella configurazione di figura la squadretta è in **equilibrio**, l'asse della molla è orizzontale, una sbarretta è in direzione verticale e l'altra è "obliqua". [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; può farvi comodo ricordare che $cos(\pi/3) = sin(\pi/6) = ½$ e $cos(\pi/6) = sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$]

a) Discutete con chiarezza, in brutta, se, nella configurazione di equilibrio considerata, la molla si trova compressa o estesa rispetto alla sua lunghezza di riposo.

Discussione: ………………………………. Essendo la squadretta un corpo rigido esteso, l'equilibrio deve verificarsi sia in senso traslazionale (del centro di massa) che rotazionale. Esaminiamo quest'ultimo: scegliendo O come polo, i momenti delle forze a braccio non nullo sono solo quelli della forza elastica della molla e della forza peso della sbarretta obliqua rispetto all'orizzontale. Infatti la forza peso della sbarretta che si trova in direzione verticale ha braccio evidentemente nullo rispetto al polo O. Il momento della forza peso della sbarretta obliqua tende a far ruotare la squadretta in senso orario (rispetto alla figura). Esso deve pertanto essere bilanciato da un momento che tenda a far ruotare la squadretta in senso antiorario. La forza della molla deve allora essere diretta verso la sinistra di figura, cioè la molla deve essere compressa rispetto alla sua lunghezza a riposo.

b) Quanto vale la compressione o estensione ΔL della molla? Quanto vale, in modulo, la forza $\boldsymbol{F_O}$ esercitata dal perno sulla squadretta? [Per la compressione o estensione fornite il valore assoluto, lasciando stare il segno che è ovvio dalla risposta al quesito precedente]

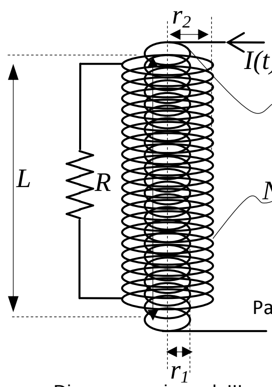
ΔL = …………………………………… ~ ………. m $Mg/(2ktg\theta) \sim 8.5\text{x}10^{-2}$ m [per l'equilibrio rotazionale dobbiamo uguagliare i moduli dei momenti delle due forze che hanno braccio nullo, e che abbiamo identificato sopra. La forza peso mg della sbarretta obliqua si trova applicata a metà lunghezza (sul centro di massa!) e quindi il braccio è $(L/2)cos\theta$, dove θ indica l'angolo compreso tra asse della sbarretta obliqua e orizzontale. Si vede facilmente che $\theta = \pi/6$. Il braccio della forza elastica F_{ELA} esercitata dalla molla è invece $Lsin\theta$. Dunque deve essere, per i moduli: $Mg(L/2)cos\theta = F_{ELA}Lsin\theta$, ovvero $F_{ELA} = Mg/(2tg\theta)$. Essendo, in modulo, $F_{ELA} = k\Delta L$ si ottiene la risposta]

F_O = …………………………………… ~ ………. N $Mg(4+1/(4tg^2\theta))^{1/2} = Mg(4+3/4)^{1/2} = (Mg/2)19^{1/2} \sim 11$ N [per l'equilibrio traslazionale deve essere nulla la somma delle forze applicate alla squadretta. La componente verticale della forza esercitata dal perno sulla squadretta dovrà essere pari a $F_P = 2Mg$ (e diretta verso l'alto), quella orizzontale pari a $F_{ELA} = Mg/(2tg\theta)$ (e diretta verso la destra di figura). Le due componenti considerate sono ortogonali, e, essendo la forza un vettore, si ha $F_O = (F_P^2+F_{ELA}^2)^{1/2}$. Sostituendo e facendo un po' di matematica si ottiene la risposta]

c) Supponete ora che, ad un dato istante, un proiettile di massa $m = M/50$ = 10 g colpisca l'estremo della squadretta marcato come B in figura: il proiettile incide avendo una velocità di modulo v_0 = 50 m/s, direzione orizzontale e verso come in figura e, dopo l'urto, rimane conficcato nel materiale della squadretta (urto **anelastico**!). In seguito all'urto, il sistema costituito da squadretta e proiettile conficcato comincia a ruotare attorno al perno. Quanto vale la velocità angolare ω del sistema **subito dopo** l'urto? [Spiegate in brutta **con chiarezza e completezza tutti** gli aspetti coinvolti nella soluzione]

$\omega \sim$ …………………………………… = ………. rad/s $\sim 3mv_0/(2ML) = 7.5$ rad/s [il problema coinvolge un urto (anelastico) tra un proiettile puntiforme e un oggetto esteso vincolato a muoversi di sola rotazione (la squadretta). Pertanto conviene come prima cosa chiedersi se esistono, e individuare quali sono, le grandezze meccaniche complessive del sistema che si conservano nell'urto. Sicuramente non si conserva l'energia cinetica, essendo l'urto anelastico. La quantità di moto complessiva è anche non conservata, a causa delle forze impulsive generate dal perno (fisso e rigido). D'altra parte, se si conservasse la quantità di moto tutto il sistema, dopo l'urto, sarebbe animato da moto di traslazione nella direzione di $\boldsymbol{v_0}$, come si può facilmente determinare scrivendo le equazioni relative. Dato che le forze impulsive sono generate dal perno, esse hanno braccio nullo, se si considera O come polo. Dunque il momento angolare complessivo rispetto al polo O si conserva. Infatti non ci sono altre forze esterne impulsive che agiscono sul sistema oltre a quella del perno, che ha braccio nullo (la forza peso è sicuramente non impulsiva, e tale è, ragionevolmente, la forza elastica della molla, visto che non è considerata infinitamente rigida). Subito dopo l'urto il momento angolare complessivo (naturalmente parliamo della componente assiale, quella che ci interessa) si può scrivere come $I_{TOT}\omega$, con I_{TOT} momento di inerzia complessivo del sistema dato dalla somma dei momenti di inerzia dei singoli componenti (le due sbarrette e il proiettile conficcato). Ognuna delle due sbarrette si trova a ruotare per un asse (ortogonale a quello delle sbarrette) passante per un suo estremo, per cui per ognuna il momento di inerzia è $ML^2/3$. Il proiettile è una massa puntiforme che si trova a ruotare a distanza L dal polo, per cui contribuisce al momento di inerzia con un termine mL^2 . A causa del rapporto tra le masse, questo contributo può essere considerato trascurabile (lo consideriamo trascurabile d'ora in avanti per semplicità!), per cui $I_{TOT} \sim 2ML^2/3$. Prima dell'urto, il momento angolare è associato al movimento del solo proiettile. Poiché il "braccio" della quantità di moto, cioè la distanza tra direzione della quantità di moto e polo, vale L , il momento angolare si può scrivere come mv_0L . Uguagliando si ottiene la soluzione. Notate che in tutto il procedimento la presenza della molla non è stata considerata. Infatti, oltre a non contribuire con eventuali forze impulsive, la presenza della molla non è di interesse perché l'intervallo di tempo fra subito prima e subito dopo l'urto è troppo breve perché la molla possa cambiare la propria lunghezza]

3. Due solenoidi, composti rispettivamente da N_1 = 1000 e N_2 = 2000 spire di filo ottimo conduttore (di resistività trascurabile), hanno la stessa lunghezza L = 1.0 m e sono coassiali l'uno rispetto all'altro. Come rappresentato in figura, il solenoide 1 è "interno" al solenoide 2; infatti i raggi sono rispettivamente r_1 = 2.0 cm e r_2 = 4.0 cm. Notate che, visti i rapporti tra raggio e lunghezza, per tutti e due i solenoidi si può usare l'approssimazione di solenoide "infinito". Il solenoide 1 è collegato a un generatore che eroga una corrente $I(t)$ variabile nel tempo. In particolare si sa che la corrente è nulla per $t < t_0 = 0$, e quindi aumenta **linearmente nel tempo** fino a raggiungere il valore I' = 50 A all'istante t' = 1.0 ms. Inoltre si sa che per $t > t'$ l'intensità di corrente resta costantemente al valore I'. Il



Disegno non in scala!!!

solenoide 2 è collegato a un resistore di resistenza R = 50 ohm. [Usate $\mu_0 = 4\pi x10^{-7}$ T m/A per la costante di permittività magnetica del vuoto]

a) Scrivete esplicitamente la **funzione** del tempo che descrive l'andamento del modulo del campo magnetico $B_1(t)$ prodotto dal solenoide 1 nel solo intervallo di tempo $0 < t < t'$. [Dovete scrivere una funzione, dunque non usate valori numerici ma riferitevi ai parametri noti del problema attraverso i simboli citati nel testo]

$B_1(t)$ = ………………………….. $\mu_0 (N_1/L) I'(t/t')$[i tempi caratteristici in gioco sono tali da poter tranquillamente usare l'approssimazione stazionaria per esprimere il campo magnetico, o di induzione magnetica, B_1 che si forma all'interno del solenoide 1. Inoltre la geometria è tale da poter usare l'espressione per un solenoide infinito, come suggerito dal testo. Si ha quindi $B_1(t) = \mu_0 (N_1/L) I(t)$, con $I(t) = I't/t'$ corrente che scorre nel solenoide (nell'intervallo di tempo considerato)]

b) Scrivete esplicitamente la **funzione** del tempo che descrive l'andamento della forza elettromotrice (o differenza di potenziale) $\Delta V_2(t)$ che si ottiene per induzione ai capi del solenoide 2 nell'intervallo di tempo $0 < t < t'$. [Anche in questo caso dovete scrivere una funzione; trascurate eventuali segni negativi]

$\Delta V_2(t)$ = ………………………….. $(\pi r_1^2 \mu_0 N_1 N_2/L)I'/t'$ [secondo la legge di Faraday, la forza elettromotrice indotta **in una singola** spira del solenoide 2 si trova come $\Delta V_{spira} = -d\Phi(\boldsymbol{B_1})/dt$, dove $\Phi(\boldsymbol{B_1})$ rappresenta il flusso di campo magnetico (prodotto dal solenoide 1) che attraversa la spira. Il segno che compare in questa equazione è rilevante per determinare il verso di percorrenza della corrente indotta, ma non è importante per la soluzione del quesito, per cui lo ometteremo. Vista la geometria del sistema e considerando che il solenoide produce un campo magnetico uniforme diretto assialmente al suo interno e **nullo** all'esterno, è $\Phi(\boldsymbol{B_1}) = B_1 \pi r_1^2$ (fate attenzione che in questa espressione deve comparire la superficie del solenoide 1, non quella della spira del solenoide 2, dato che, come già sottolineato, il campo è nullo fuori dal solenoide 1!). Introducendo l'andamento temporale di $B_1(t)$ determinato sopra ed eseguendo la derivata temporale si ottiene, trascurando il segno, $\Delta V_{spira} = \mu_0 (N_1/L) \pi r_1^2 I'/t'$, che è costante e diversa da zero nell'intervallo di tempo considerato. Le N_2 spire che compongono il solenoide 2 sono tutte, dal punto di vista elettrico, collegate in serie. Quindi la forza elettromotrice ai capi dell'intero solenoide 2 è data da $N_2 \Delta V_{spira}$, da cui la risposta]

c) Quanto valgono le potenze (istantanee) W_A e W_B "dissipate" per effetto Joule nel resistore R agli istanti rispettivamente t_A = 0.5 ms e t_B = 5.0 ms? [Attenti ai trabocchetti!]

W_A = ………………………….. = ……… W $\Delta V_2^2/R = 5.0x10^2$ A , con ΔV_2 determinato sopra [la potenza dissipata per effetto Joule da un resistore R ai cui capi è applicata una differenza di potenziale ΔV si esprime come $W = \Delta V^2/R$. L'istante t_A si trova all'interno dell'intervallo temporale considerato nel quesito di cui al punto precedente, da cui la soluzione] secondo la legge di Faraday, la forza elettromotrice indotta **in una singola** spira del solenoide 2 si trova come $\Delta V_{spira} = -d\Phi(\boldsymbol{B_1})/dt$, dove $\Phi(\boldsymbol{B_1})$ rappresenta il flusso di campo magnetico (prodotto dal solenoide 1) che attraversa la spira. Il segno che compare in questa equazione è rilevante per determinare il verso di percorrenza della corrente indotta, ma non è importante per la soluzione del quesito, per cui lo ometteremo. Vista la geometria del sistema e considerando che il solenoide produce un campo magnetico uniforme diretto assialmente al suo interno e **nullo** all'esterno, è $\Phi(\boldsymbol{B_1}) = B_1 \pi r_1^2$ (fate attenzione che in questa espressione deve comparire la superficie del solenoide 1, non quella della spira del solenoide 2, dato che, come già sottolineato, il campo è nullo fuori dal solenoide 1!). Introducendo l'andamento temporale di $B_1(t)$ determinato sopra ed eseguendo la derivata temporale si ottiene, trascurando il segno, $\Delta V_{spira} = \mu_0 (N_1/L) \pi r_1^2 I'/t'$, che è costante e diversa da zero nell'intervallo di tempo considerato. Le N_2 spire che compongono il solenoide 2 sono tutte, dal punto di vista elettrico, collegate in serie. Quindi la forza elettromotrice ai capi dell'intero solenoide 2 è data da $N_2 \Delta V_{spira}$, da cui la risposta]

W_B = ………………………….. = ……… W 0 [l'istante considerato è successivo a quello in cui la corrente nel solenoide 1 assume un valore costante. Alimentando il solenoide 1 con un corrente costante anche il campo magnetico da lui generato sarà costante nel tempo. Per un campo magnetico costante nel tempo non c'è fenomeno di induzione. Infatti la derivata temporale del flusso del campo magnetico **si annulla** , ovvero la corrente indotta nel solenoide 2 è nulla e nulla è la potenza istantanea dissipata dal resistore]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 18/9/2014 Firma: