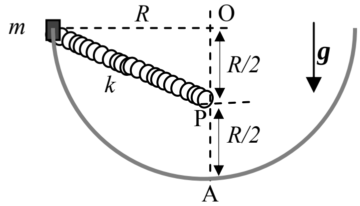
Corso di Laurea Ing. E-A – ESAME DI FISICA GENERALE - 14/1/2015

Nome e cognome: …………………………………………………………………… **Matricola: ……………**

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un manicotto (**puntiforme**) di massa m = 1.0 kg può muoversi con **attrito trascurabile** su una guida rigida e fissa, in cui è infilato, che ha la forma di una semicirconferenza di raggio R = 50 cm e si trova su un piano verticale, come rappresentato in figura. Al manicotto è attaccato l'estremo di una molla di massa trascurabile e costante elastica k = 20 N/m, il cui altro estremo è fissato nel punto P di figura. Tale punto è equidistante dal centro e dal punto più basso della guida (marcati rispettivamente con O e A in figura). La molla ha lunghezza di riposo **trascurabile** (in pratica, L_0 = 0). Inizialmente il manicotto si trova in quiete nella posizione di figura (punto più alto della guida). A un dato istante viene lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

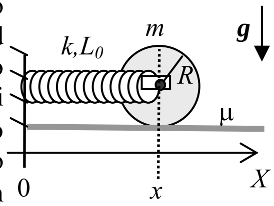


a) Quanto vale, in modulo, l'accelerazione iniziale a_0 che il manicotto ha nell'istante in cui viene lasciato libero di muoversi?
a_0 = …………………………………… ~ ……… m/s^2 $g + (k/m)(R/2) = 15$ m/s^2 [all'inizio del moto il manicotto è praticamente fermo, per cui l'accelerazione centripeta è nulla. L'unica accelerazione è in direzione tangenziale, essendo proporzionale alle componenti in questa direzione delle forze applicate al manicotto. Tali forze sono solo il peso, la cui componente è mg (la direzione verticale coincide con quella tangenziale, nell'istante considerato), e la forza della molla. La molla, avendo lunghezza di riposo trascurabile, è sempre estesa, per cui la forza è diretta nel come l'asse della molla e orientata verso il punto P. Il modulo della forza è $F_{ELA} = kL$, con L lunghezza attuale della molla. Per la geometria (teorema di Pitagora!), si ha che $L = (R^2+(R/2)^2)^{1/2} = (R/2)\surd 5$. La componente tangenziale si ottiene moltiplicando il modulo per il coseno dell'angolo compreso tra asse della molla e direzione verticale, che vale (per la trigonometria) $(R/2)/L$. Dunque la componente della forza elastica è semplicemente $kL(R/2)/L = kR/2$. Essa è diretta verso il basso come la forza peso, da cui la risposta]

b) Quanto vale, in modulo, la velocità v_A con cui il manicotto passa, se ci passa, per il punto più basso della guida (A in figura)?
v_A = …………………………………… ~ ……… m/s $(2gR + (k/m)R^2)^{1/2}$ ~ 3.8 m/s [essendo gli attriti trascurabili, si usa la conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_k + \Delta U$. La variazione di energia cinetica è $\Delta E_k = (m/2)v_A^2$. La variazione di energia potenziale è dovuta alla forza peso e alla forza elastica, entrambi forze conservative che agiscono sul manicotto. La parte legata alla forza peso è semplicemente $\Delta U_G = -mgR$, dato che il manicotto abbassa la sua quota di un tratto pari a R . La parte legata alla forza elastica è $\Delta U_{ELA} = (k/2)(R/2)^2-(k/2)L^2$, dove abbiamo usato il fatto che la lunghezza di riposo della molla considerata è nulla, notato che "alla fine" del processo la molla ha lunghezza $R/2$, e indicato con L la lunghezza iniziale. Come stabilito nella risposta al quesito precedente, si ha $L^2 = 5(R/2)^2$, per cui $\Delta U_{ELA} =- (k/2) R^2$, Mettendo tutto assieme si ottiene la soluzione che, essendo possibile (reale), garantisce che il manicotto può passare per il punto A]

c) Quanto vale, in modulo, direzione, verso, la reazione vincolare $\mathbf{N_A}$ esercitata dalla guida sul manicotto nell'istante in cui esso **passa** per il punto più basso della guida?
N_A = …………………………………… = ……… N $3mg + kR/2 = 34$ N [il manicotto si sta muovendo lungo una traiettoria circolare. Dunque esso deve risentire di un'accelerazione centripeta, diretta verticalmente verso l'alto, di modulo $a_C = v_A^2/R = 2g+(k/m)R$, dove abbiamo usato il risultato della risposta precedente. Questa accelerazione centripeta deve essere fornita dalle forze, tutte, che hanno componenti in direzione verticale. Tali forze sono il peso, di modulo mg diretto verso il basso, la forza elastica, di modulo $kR/2$ diretta verso l'alto (la molla è sicuramente estesa, essendo trascurabile la sua lunghezza di riposo), e la reazione vincolare, di direzione verticale e verso da determinare. Scegliendo come positivo il verso centripeto (verso l'alto), si ha quindi: $a_C = (k/m)R/2 - g + (N_A/m)$, ovvero $N_A = ma_C + mg - kR/2$. Sostituendo l'espressione di a_C già determinata si ottiene la soluzione]
Direzione e verso: ……………………………………………… La direzione è verticale, cioè radiale rispetto al punto A; il verso dipende dal segno dell'espressione della componente N_A determinata sopra. Essendo il risultato positivo, per la scelta dei segni che abbiamo fatto la reazione vincolare è diretta verso l'alto.

2. Un cilindro pieno e omogeneo, di raggio R = 10 cm e massa m = 0.50 kg, è libero di ruotare con attrito trascurabile attorno al suo asse, che è collegato come in figura (attraverso un giogo di massa trascurabile) ad una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 3.0 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 2.0 m, il cui altro estremo è vincolato ad una parete rigida. Il cilindro è poggiato su un piano orizzontale **scabro** dotato di coefficiente di attrito μ incognito; inizialmente il cilindro si trova **fermo** in una posizione tale che il suo centro di massa occupa la posizione $x_0 = L_0/2$ nel riferimento di figura (orizzontale, diretto verso destra e centrato sulla parete rigida). In queste condizioni iniziali la molla è ovviamente compressa per un tratto $\Delta_0 = L_0/2$. A un dato istante il cilindro viene lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla e si osserva che il suo moto è di **rotolamento puro**. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



Disegno non in scala!!

a) Scrivete la **funzione** $F_A(x)$ che esprime il modulo della forza di attrito al punto di contatto tra cilindro e piano in funzione della coordinata x che individua la posizione **generica** del centro di massa del cilindro nel riferimento impiegato. Determinate inoltre il valore minimo μ_{MIN} che il coefficiente di attrito deve avere affinché il moto sia di rotolamento puro nell'intero tratto compreso dalla posizione iniziale alla posizione $x' = L_0$ (cioè quella per cui la molla si trova alla propria lunghezza di riposo). [Quando scrivete la funzione, **non** usate valori numerici! Spiegate per bene, in brutta, come procedete]
$F_A(x)$ = …………………………………… $-(k/3)(x - L_0)$ [partiamo dalla scrittura delle equazioni del moto traslazionale (del centro di massa) e rotazionale del cilindro. La traslazione avviene lungo l'asse X e l'accelerazione in questa direzione si scrive $a_{CM} = -(k/m)(x-L_0) - F_A(x)$, dove abbiamo ipotizzato una forza di attrito diretta lungo l'asse X e orientata verso la sinistra della figura. Il moto rotazionale è dato dal momento della sola forza di attrito (l'unica ad avere braccio non nullo rispetto al centro di massa), che ha momento pari a $R F_A(x)$. Dunque $\alpha = F_A(x)R/I = 2 F_A(x)/(mR)$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo posto il momento di inerzia del cilindro pieno e omogeneo pari a $I = mR^2/2$. Poiché il moto è dichiaratamente di rotolamento puro, le accelerazioni traslazionali e rotazionali devono essere legate dalla relazione cinematica $a_{CM} = \alpha R$. Si ottiene un sistema di tre equazioni algebriche con tre incognite al cui soluzione per $F_A(x)$ fornisce la risposta]
μ_{MIN} = …………………………………… = ……….. $(kL_0/(6mg) = 0.20$ [affinché ci sia rotolamento puro deve essere $F_A(x) \le \mu N$, con $N = mg$ reazione vincolare al contatto. Si ha quindi $\mu \ge F_A(x)/(mg) = -(k/3)(x-L_0)/(mg)$. Nel tratto di moto del cilindro considerato, come è facile dimostrare, si ha $L_0/2 \le x \le L_0$, per cui l'ultimo membro dell'espressione appena scritta ha il suo valore massimo per $x = L/2$. In queste condizioni deve essere $\mu \ge -(k/3)(L_0/2-L_0)/(mg)$, da cui la risposta]

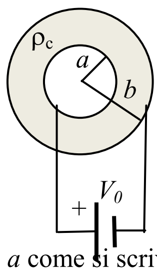
b) Quanto vale, in modulo, la velocità del centro di massa del cilindro, v'_{CM} , nell'istante in cui esso passa per la posizione $x' = L_0$?

v'_{CM} = …………………………………… = ……… m/s $(2k/(3m))^{1/2}L_0/2 = 2.0$ m/s [visto che il moto è dichiaratamente di rotolamento puro, per cui la forza d'attrito non compie lavoro, conviene usare la conservazione dell'energia meccanica. $0 = \Delta E_k + \Delta U$, con $\Delta E_k = (m/2)v'^2_{CM} + (I/2)\omega'^2 = (m/2)(3/2)v'^2_{CM}$, dove abbiamo tenuto conto che $\omega' = v'_{CM}R$ (rotolamento puro) e $I = (m/2)R^2$ (cilindro pieno e omogeneo) e $\Delta U = -(k/2)(L_0/2)^2$, dove abbiamo tenuto conto che "alla fine" del processo, cioè quando il centro di massa si trova nella posizione $x' = L_0$, la molla non possiede energia elastica. Da qui la soluzione]

c) Dimostrate in brutta che il moto di traslazione del centro di massa del cilindro è armonico e calcolatene la pulsazione Ω.
Dimostrazione: ……………………………….. Riprendendo quanto scritto per la soluzione del quesito a) possiamo scrivere l'equazione del moto traslazionale del centro di massa come $a_{CM}(x) = -(2k/(3m))(x-L_0) = -(2k/(3m))x + (2k/(3m))L_0 = -K_1x + K_2$, con K_1 e K_2 costanti (positive) opportunamente dimensionate. Questa è la forma dell'equazione del moto armonico.
Ω = …………………………………… = ……… rad/s $(2k/(3m))^{1/2} = 2.0$ rad/s [nel moto armonico di cui abbiamo determinato l'equazione si ha $\Omega = \sqrt{K_1}$, da cui la risposta]

3. Un dispositivo elettrico è costituito da un cilindro omogeneo di materiale perfettamente conduttore di raggio a = 5.0 mm coassiale a un guscio cilindrico sottile, di raggio $b = 2a$, fatto dello stesso materiale perfettamente conduttore. Lo spazio tra i due conduttori è riempito da un guscio cilindrico spesso fatto di materiale **debolmente conduttore** con resistività $\rho_C = 1.0\mathrm{x}10^2$ ohm m. Si noti che tutti gli elementi cilindrici del sistema hanno la stessa altezza h = 1.0 m: essendo $h>>a,b$ la simmetria del sistema può essere considerata puramente cilindrica e si possono trascurare gli "effetti ai bordi". Il sistema è collegato a un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 10 V come rappresentato in figura (il polo positivo è collegato al cilindro di raggio $r=a$, il polo negativo al guscio di raggio $r=b$) e si suppone che il sistema si trovi in **condizioni stazionarie**. [Usate $\varepsilon_0 = 8.8\mathrm{x}10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto, e supponete che questa sia anche la costante dielettrica del materiale debolmente conduttore]

Vista "dall'alto"



a) Chiamando Q_a la carica (**generica**, non nota e non ancora determinata) che si trova sul cilindro conduttore di raggio a come si scrive la **funzione** $\boldsymbol{E}(r)$ che esprime il campo elettrico nella regione $a<r<b$? [Dovete una funzione della distanza r dall'asse; non usate valori numerici per questo risultato e **spiegate bene**, in brutta, il procedimento; indicate anche direzione e verso]
$\boldsymbol{E}(r)$ = …………………………….. $(Q_a/(2\pi\varepsilon_0 rh))\hat{\boldsymbol{r}}$ [per il teorema di Gauss, usando una scatola di forma cilindrica (coassiale al sistema) e raggio r generico, compreso tra a e b, si ha la soluzione, dove si è anche scritta la direzione e il verso usando il versore del sistema di riferimento cilindrico centrato sull'asse del sistema]

b) Quanto vale, in condizioni stazionarie, la carica Q_a definita al punto precedente? [Può farvi comodo notare che $ln(2) \sim 0.69$]
Q_a = ……………………………. ~ ………… C $(2\pi\varepsilon_0 hV_0)/ln(b/a) \sim 8.0\mathrm{x}10^{-10}$ C [le condizioni "al contorno" del problema, ovvero la presenza del generatore, impongono che $\Delta V = V(r=b) - V(r=a) = -V_0$, dove il segno meno dipende dalla definizione della differenza di potenziale scritta: chiaramente il guscio cilindrico di raggio c, essendo collegato al polo negativo del generatore, si troverà a potenziale più basso rispetto al cilindro di raggio a. Quindi deve essere: $-V_0 = -\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}$, cioè, tenendo conto della direzione (radiale) del campo, $V_0 = \int_a^b E dr$. Sostituendo l'espressione del campo elettrico nella regione di interesse trovata sopra si ha $V_0 = (Q_a/(2\pi\varepsilon_0 h)) \int_a^b (1/r)\, dr = Q_a/(2\pi\varepsilon_0 h))(ln(b/a)$, da cui la soluzione]

c) Quanto vale, in condizioni stazionarie, l'intensità di corrente I erogata dal generatore?
I = ……………………………. ~ ………… A $V_0 2\pi h/(ln(b/a)\rho_c) \sim 0.91$ A [la corrente scorre radialmente dal guscio cilindrico interno a quello esterno. La densità di corrente segue le linee del campo elettrico, e può essere scritta come $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{E}/\rho_c$. Il suo modulo è quindi $j = Q_aV_0/(ln(b/a)\rho_c r)$. L'intensità di corrente si trova calcolando il flusso di $\boldsymbol{j}$ su una superficie cilindrica, coassiale al sistema e della stessa altezza degli altri elementi cilindrici, di raggio r compreso tra a e b. La densità di corrente è radiale e, dipendendo solo da r, è uniforme sulla superficie su cui si sta calcolando il flusso. Pertanto esso è pari al prodotto della densità di corrente per l'area della superficie considerata, che è $2\pi hr$. Mettendo tutto insieme si ottiene la soluzione]

Nota: l'esito della prova sarà pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).