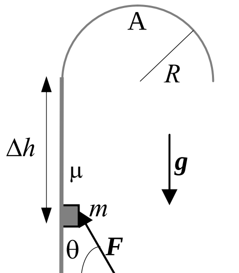
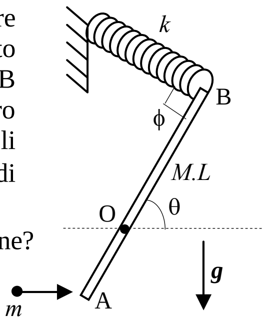
Corso di Laurea Ing. E-A – ESAME DI FISICA GENERALE - 30/1/2015

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*



1. Una piccola cassa (da considerare puntiforme) di massa m = 2.0 kg è a contatto con una parete verticale rigida e indeformabile che ha una superficie scabra e presenta un coefficiente di attrito **sia statico che dinamico** di valore μ = 0.50. Sulla cassa agisce una forza esterna $\boldsymbol{F}$ di modulo F = 20 N, la cui direzione forma un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale con orientazione "verso l'alto" (vedi figura). [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $cos(\pi/3) = 1/2$]
   a) Supponete che nelle condizioni sopra descritte la cassa rimanga in equilibrio. Quanto vale, in **modulo**, la forza di attrito F_A? Discutete per bene, in brutta, se le condizioni espresse nel testo possono effettivamente condurre all'equilibrio.
   F_A = …………………………………… ~ .... N $|mg - Fsin\theta| \sim 2.3$ N [poiché la cassa è in equilibrio, la somma delle forze nella direzione in cui potrebbe esserci movimento (quella verticale) deve essere nulla. In tale direzione agiscono la forza peso, verso il basso, e la componente verticale della forza esterna, verso l'alto. Tenendo conto delle proiezioni e notando che il problema richiede di determinare il **modulo** della forza di attrito (non ci interessa determinarne il verso, ragione per cui usiamo il valore assoluto della differenza tra le componenti delle forze), si ottiene il risultato]
   Discussione: …………………………………… occorre assicurarsi che il coefficiente di attrito statico dato nel testo sia in grado di garantire una sufficiente intensità dell'attrito, ovvero occorre verificare la disuguaglianza: $F_A \le \mu_S N$. La reazione vincolare esercitata dalla parete sulla cassa è tale da impedirne il moto in direzione orizzontale, cioè essa è uguale, in modulo, alla somma delle componenti orizzontali delle forze applicate. La sola forza $\boldsymbol{F}$ ha componente orizzontale $Fcos\theta$, per cui la relazione diventa $F_A \le \mu_S Fcos\theta$. Usando i valori numerici dati nel testo (il valore massimo della forza di attrito risulta 4.9 N) si vede che la disuguaglianza è verificata e dunque l'equilibrio può effettivamente realizzarsi]
   b) Immaginate che, a un dato istante, il modulo della forza esterna raddoppi diventando pari a F' = 40 N (direzione e verso restano inalterati e la forza agisce sempre sulla cassa durante il suo spostamento). In conseguenza di questa variazione, la cassa prende a muoversi verso l'alto. Quanto vale la sua velocità v' nell'istante in cui la sua quota è aumentata di Δh = 1.0 m rispetto alla partenza?
   v' = …………………………………… ~ .... m/s $(\Delta h((2F'/m)(sin\theta - \mu cos\theta)-2g))^{1/2} \sim$ 2.2 m/s [conviene ragionare in termini di bilancio energetico, tenendo in debito conto sia del lavoro della forza $\boldsymbol{F'}$, indicato con $L_{F'}$, che del lavoro della forza di attrito, indicato con L_A . Si può quindi scrivere: $L_{F'} + L_A = \Delta E_k + \Delta U_G$. I termini al secondo membro valgono $\Delta E_k = (m/2)v'^2$ (la cassa parte da ferma) e $\Delta U_G = mg\Delta h$ (la cassa aumenta la sua quota della quantità Δh). Nello spostamento, la cassa risente della forza di attrito **dinamico** di modulo $F_{A,D} = \mu N = \mu F' cos\theta$, dove abbiamo notato che la reazione vincolare è sempre pari a $F'cos\theta$. Questa forza è evidentemente uniforme e costante, per cui, tenendo anche conto che essa è antiparallela allo spostamento, si ha $L_A = -F_{A,D}\Delta h = -\mu F'cos\theta\ \Delta h$. Infine il lavoro della forza $\boldsymbol{F'}$, anch'essa uniforme e costante, è $L_{F'} = F'sin\theta\ \Delta h$, dove abbiamo notato che la proiezione dello spostamento lungo la direzione di questa forza è $\Delta h\ sin\theta$. Mettendo tutto assieme si ottiene la soluzione]
   c) Tenete ora conto del fatto che, dopo aver percorso il tratto di lunghezza Δh sulla parete scabra, la cassa incontra un percorso **liscio** (cioè di **attrito trascurabile**) che ha la forma di una semicirconferenza di raggio R = 50 cm disposta sul piano verticale, come descritto in figura. La cassa compie questo percorso essendo sempre sottoposta alla forza $\boldsymbol{F'}$ di cui al punto precedente. Discutete per bene, in brutta, se la cassa raggiunge il punto più alto del percorso, segnato con A in figura.
   Discussione: …………………………………… nel punto più alto del percorso la cassa si trova ad avere una quota che è più alta di un tratto R rispetto alla quota considerata nella soluzione al punto precedente. Usando il bilancio energetico, stavolta senza considerare il lavoro della forza di attrito, che è trascurabile, determiniamo la velocità v_A della cassa nel caso in cui essa raggiunga il punto A. Si ha $L_{F'} = \Delta E_k + \Delta U_G$. Come già specificato, si ha $\Delta U_G = mgR$; inoltre è $\Delta E_k = (m/2)(v_A^2 - v'^2)$, dato che, come istante "iniziale" del processo, stiamo considerando quello dell'istante di passaggio per il punto di quota Δh rispetto al punto di partenza – vedi sopra. Il lavoro della forza $\boldsymbol{F'}$ si esprime facilmente scomponendo la forza nelle due direzioni verticale e orizzontale e considerando che lungo entrambi le direzioni lo spostamento ha modulo R (è una semicirconferenza!). Si ha allora, tenendo conto dei segni, $L_{F'} = F'R(-cos\theta + sin\theta)$, dato che lo spostamento in direzione orizzontale avviene in verso opposto rispetto alla corrispondente componente della forza. Mettendo tutto assieme si ha $v_A^2 = v'^2 - 2gR + (2F'/m)R(sin\theta - cos\theta) = -2g(\Delta h+R) + (2F'/m)((\Delta h+R)sin\theta - (\mu\Delta h+R)cos\theta)$. Affinché questa equazione abbia una soluzione reale, occorre che il secondo membro sia positivo (qualora il secondo membro fosse negativo, la velocità v_A sarebbe immaginaria, cioè la cassa non arriverebbe al punto). Con i valori numerici dell'esercizio, si ha $v_A^2 \sim 2.5$ (m/s)^2 , dunque la cassa arriva per il punto A. Notate che, essendo presente la forza esterna $\boldsymbol{F'}$, la cassa si mantiene sempre a contatto con il percorso, che quindi fornisce il debito valore della reazione vincolare affinché il moto curvilineo sia possibile.



2. Una **sottile** sbarra **omogenea** di lunghezza L = 1.0 m e massa M = 3.0 kg è imperniata in modo da poter ruotare con attrito trascurabile attorno a un perno che la attraversa a tre quarti della sua lunghezza: facendo riferimento alla figura, questo significa che le lunghezze dei segmenti indicati sono OA = $L/4$ e OB = $3L/4$. All'estremo B della sbarra è fissato l'estremo di una molla di massa trascurabile e costante elastica k = 49 N/m, il cui altro estremo è vincolato a una parete rigida e indeformabile. Tutto il sistema è **in equilibrio** con gli angoli rappresentati in figura che valgono $\theta = \pi/3$ e $\phi = \pi/2$. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $cos(\pi/3) = ½$ e $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$]
   a) Quanto vale l'allungamento $\Delta\ell$ della molla rispetto alla sua lunghezza di riposo, ovvero la sua elongazione? Quanto vale, in modulo, la forza F_O che il perno esercita sulla sbarra nel perno O?
   $\Delta\ell$ = …………………….… = ……….… m; $Mgcos\theta/(3k) = 0.10$ m [esaminiamo l'equilibrio rotazionale della sbarra rispetto al polo O: le forze che hanno un momento non nullo sono il peso Mg , applicato nel centro di massa, e la forza elastica della molla, che ha modulo $k\Delta\ell$. Il centro di massa, essendo la sbarra sottile e omogenea, si trova sull'asse della sbarra stessa, a distanza $L/4$ rispetto al polo O ("sopra" a questo), per cui il braccio è $(L/4)cos\theta$. Il momento corrispondente, di modulo $Mg(L/4)cos\theta$, tende a far ruotare la sbarra in senso orario di figura. Per l'equilibrio è necessario che l'altro momento, quello della forza elastica, tenda a far ruotare la sbarra in senso opposto: la molla deve dunque essere allungata rispetto alla lunghezza di riposo. Il braccio della forza elastica, essendo $\phi = \pi/2$, è semplicemente pari a $3L/4$, per cui il momento ha modulo $k\Delta\ell(3L/4)$. Uguagliando i momenti si ottiene la risposta]

F_O = ... ~ .... N $((Mg\sin\theta\cos\theta/3)^2+((-Mg\cos^2\theta/3+Mg)^2)^{1/2}=(Mg/12)(3+11^2)^{1/2} \sim 11Mg/12 \sim 27$ N [per l'equilibrio traslazionale della sbarra il perno deve esercitare forze che bilanciano la forza peso $M\mathbf{g}$ e la forza elastica di modulo $k\Delta\ell = Mg\cos\theta/3$, dove abbiamo usato la risposta al quesito precedente **.** La componente orizzontale della forza $\mathbf{F_O}$ è uguale e opposta alla componente orizzontale della forza elastica, che si ottiene proiettando il modulo appena scritto per $\sin\theta$, come si può facilmente verificare dal disegno; tale componente vale allora $Mg\cos\theta\sin\theta/3$. La componente verticale è invece data dalla somma algebrica della componente verticale della forza elastica , che si ottiene moltiplicando per $\cos\theta$ e dunque vale $Mg\cos^2\theta/3$, e della forza peso Mg, che punta in direzione opposta e quindi avrà un segno opposto. Ricordando che il modulo di un vettore si trova come radice quadrata della somma dei quadrati delle sue componenti si ha la soluzione]

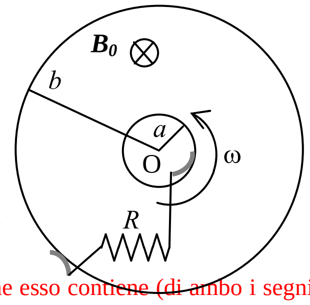
b) Supponete ora che, ad un dato istante, l'estremo A della sbarra venga colpito da un proiettile (puntiforme) di massa $m = M/3 = 1.0$ kg che urta l'estremo con una velocità orizzontale, diretta verso la destra di figura, di modulo $v_0 = 10$ m/s: si osserva che, in seguito all'urto, il proiettile rimane **conficcato** nella sbarra. Il sistema sbarra+proiettile conficcato comincia allora a ruotare: quanto vale la sua velocità angolare ω **subito dopo l'urto**? [Spiegate per bene, in brutta, cosa si conserva in questo urto e **perché**; considerate "non impulsiva" la forza esercitata dalla molla]

ω = ... ~ .... rad/s $v_0\sin\theta/(2L) \sim 4.3$ rad/s [l'urto è palesemente anelastico, per cui **non** si conserva l'energia cinetica del sistema. Evidentemente anche la quantità di moto totale del sistema **non** si conserva: se si conservasse, allora la sbarra dovrebbe avere, dopo l'urto, una velocità di traslazione nella direzione di $\mathbf{v_0}$ mentre invece essa, ovvero il sistema costituito da essa più il proiettile conficcato, comincia a ruotare. A impedire la conservazione della quantità di moto devono essere delle forze impulsive, le uniche che possono modificare la quantità di moto nella breve durata dell'urto. Esse possono essere generate solo dal perno, per cui hanno momento nullo rispetto a O. Di conseguenza si conserva il momento angolare del sistema rispetto a O. Prima dell'urto esso è dato solo dal movimento del proiettile, e ha modulo $mv_0(L/4)\sin\theta = Mv_0\sin\theta(L/12)$; subito dopo l'urto esso è dato dalla rotazione del sistema sbarra+proiettile conficcato, e quindi si esprime come $I_{TOT}\omega$. Il momento di inerzia I_{TOT} è dato dalla somma del momento di inerzia del proiettile, $I_P = m(L/4)^2 = (M/3)(L/4)^2 = (1/48)ML^2$, e del momento di inerzia I_O della sbarra sottile e omogenea calcolato per rotazioni attorno al polo O . Applicando il teorema degli assi paralleli e ricordando che $I_{CM} = (M/12)L^2$, si ha $I_O = I_{CM} + M(L/4)^2 = (7/48)ML^2$, dove abbiamo notato che la distanza tra centro di massa e polo O è $L/4$. Di conseguenza si ha $I_{TOT} = (8/48)ML^2 = ML^2/6$. Mettendo tutto assieme si ottiene la soluzione]

c) Nella rotazione seguente si osserva che, a un dato istante, il sistema sbarra+proiettile passa per la posizione tale che l'asse della sbarra è verticale. La geometria del sistema è tale che in questo istante la molla si trova ad assumere **la propria lunghezza di riposo**. Supponendo che gli attriti siano **trascurabili**, quanto vale la velocità angolare ω' del sistema in questo preciso istante?

ω'= .... ~ .... rad/s $(-(2g/L)(1-\sin\theta)+(2/3)M(g/L)^2\cos^2\theta/k+(v_0^2/(4L^2))\sin^2\theta)^{1/2} \sim 4.1$ rad/s [se gli attriti sono trascurabili si può applicare la conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_k + \Delta U$. La variazione di energia cinetica, prendendo come istante iniziale quello in cui il sistema comincia a ruotare con la velocità ω trovata sopra, è $\Delta E_k = (I_{TOT}/2)(\omega'^2-\omega^2) = (ML^2/12)(\omega'^2-v_0^2\sin^2\theta/(4L^2))$. La variazione di energia potenziale deve tenere conto sia del termine dovuto alla forza peso, ΔU_G , che di quello dovuto alla forza elastica, ΔU_{ELA} . Nella rotazione dalla posizione iniziale alla posizione in cui l'asse della sbarra è verticale, il centro di massa della sola sbarra si alza di un tratto $(L/4)(1-\sin\theta)$, mentre il proiettile si abbassa dello stesso tratto. Dunque $\Delta U_G = (M-m)g(L/4)(1-\sin\theta) = (M/6)gL(1-\sin\theta)$. Inoltre, tenendo conto che della molla si conosce l'elongazione iniziale e che si sa che alla "fine" del processo considerato essa ha la propria lunghezza di riposo, cioè ha energia nulla, è facile scrivere $\Delta U_{ELA} = -(k/2)\Delta\ell^2 = -(Mg\cos\theta)^2/(18k)$. La soluzione si ottiene mettendo tutto assieme]

3. Un disco (cioè un cilindro di ridotto spessore!) **cavo** omogeneo, fatto di materiale ottimo conduttore globalmente neutro, che ha raggio interno a = 25 cm e raggio esterno b = 1.0 m, viene mantenuto in rapida rotazione attorno al suo asse (indicato con O in figura) con velocità angolare costante $\omega = 2.0\text{x}10^2$ rad/s da un motore. In **tutta** la regione in cui si trova il disco è presente un campo magnetico esterno **uniforme** e costante, diretto ortogonalmente alla superficie del disco e di modulo $B_0 = 2.0\text{x}10^{-2}$ T (il verso "entra nel foglio" rispetto alla figura). Supponete che le condizioni siano di equilibrio.



a) Discutete per bene in brutta sulla presenza di un campo **elettrico** all'interno del disco, sulla sua origine, direzione e verso, e determinate l'espressione $E(r)$ del suo modulo in funzione della distanza r dall'asse del disco. [Dovete scrivere una funzione, dunque non usate valori numerici]

Discussione: .... la rotazione del disco fornisce alle cariche che esso contiene (di ambo i segni, in ugual numero essendo il disco neutro) una velocità tangenziale di verso antiorario, come la rotazione, e di modulo pari a ωr , con r generico compreso tra a e b (si noti che la velocità non è omogenea su tutto il disco!). Per la forza di Lorentz, le cariche positive vengono spinte verso la superficie laterale "interna" e quelle negative verso la superficie laterale "esterna", come si verifica facilmente usando la regola della mano destra. Il processo di spostamento prosegue finché, all'equilibrio, le forze dovute al campo elettrico generato da questa separazione di cariche uguagliano la forza di Lorentz. In altri termini, all'interno del disco si crea un campo elettrico **impresso** $\mathbf{E^*} = -\mathbf{v}\mathbf{x}\mathbf{B_0}$. Questo campo è radiale, diretto verso l'esterno (come indicato anche dalla separazione delle cariche, che vede quelle negative andare sulla superficie laterale esterna), e disomogeneo, valendo il suo **modulo** $E(r) = \omega B_0 r$

$E(r)$ = ... $\omega B_0 r$ [vedi sopra]

b) Quanto vale, in modulo, la differenza di potenziale elettrico ΔV_{ab} che si instaura, se si instaura, tra la superficie laterale "interna" ($r = a$) e la superficie laterale "esterna" ($r = b$) del disco? [Per azzeccare i segni giusti, notate che si intende $\Delta V_{ab} = V(r=b) - V(r=a)$, con ovvio significato dei simboli]

ΔV_{ab} = ...= .... V $\omega B_0(b^2-a^2)/2 = 1.9$ V [avendo appurato che nel disco esiste un campo impresso $\mathbf{E^*}(r) = -\omega B_0\mathbf{r}$, è facile calcolare la differenza di potenziale, che vale $\Delta V_{ab} = -\int_a^b \mathbf{E^*}\bullet d\mathbf{l} = \int_a^b \omega B_0 r dr$, da cui la soluzione]

c) Tenete ora conto del fatto che, sulla superficie "esterna" e su quella "interna" del disco, sono presenti dei "contatti striscianti" in grado di realizzare un ottimo collegamento elettrico e supponete che essi siano collegati a un resistore R = 50 ohm, come rappresentato in figura. Considerando trascurabili tutti gli attriti meccanici, quanto vale la potenza P del motore necessaria per mantenere costante la velocità di rotazione?

P = ...= .... W $\Delta V_{ab}^2/R = (b^2-a^2)/2 = 7.0\text{x}10^{-2}$ W [la differenza di potenziale determinata al punto precedente si trova a essere applicata ai capi del resistore R , attraverso il quale, quindi, passerà della corrente stazionaria (costante) di intensità $I = \Delta V_{ab}/R$. Questa corrente, passando nel resistore, provocherà una "dissipazione" Joule di potenza $P_J = \Delta V_{ab} I = \Delta V_{ab}^2/R$. Usando un semplice ragionamento di bilancio energetico e tenendo conto che non ci sono attriti meccanici, si può dedurre che la potenza del motore in condizioni stazionarie dovrà servire proprio a "colmare" l'energia persa nel tempo per effetto Joule. Dunque la potenza del motore deve essere uguale, in modulo, a P_J ,da cui la soluzione. Un modo convincente per intuire la necessità che il motore compia un lavoro, e dunque produca una potenza, sta nel seguente ragionamento. Se non ci fosse il campo magnetico in condizioni stazionarie il motore sarebbe inutile, dato che esso non dovrebbe fornire alcuna coppia non essendoci alcun attrito, o altro tipo di forza, che produca un momento opposto alla rotazione. Chiudendo il circuito su una resistenza, si forma una corrente che scorre radialmente nel disco. Su questa corrente agisce il campo magnetico, producendo una forza di direzione tangenziale che dà luogo a un momento assiale (rispetto a un polo posto sull'asse). Questo momento di forze, che, come si può facilmente verificare, p resistente, cioè ha un verso tale da tendere a ridurre la velocità, produce un lavoro che deve essere continuamente fornito dal motore]

Nota: l'esito della prova sarà pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).