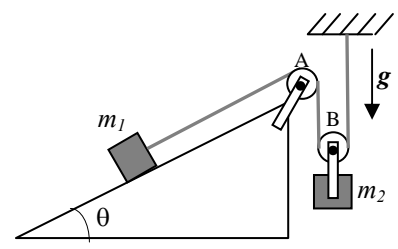


Nome e cognome:

Matricola:

Istruzioni: riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegare "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione

1. Un sistema fatto da due casse, marcate con 1 e 2, una fune, un piano inclinato e due pulegge è realizzato come un figura e descritto qui nel seguito. Una piccola cassa di massa $m_1 = 2.0$ kg è a contatto con un piano inclinato che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale; alla cassa 1 è attaccata una fune inestensibile di massa trascurabile, che si mantiene parallela al piano inclinato e quindi passa prima per la gola di una puleggia fissata alla sommità del piano stesso (indicata con A in figura), e quindi per la gola di un'altra puleggia, montata nella configurazione di "carrucola mobile" (indicata con B in figura), cioè non vincolata ma libera di traslare in direzione verticale. L'estremo della fune è attaccata a un soffitto rigido e fisso; all'asse della puleggia che funge da carrucola mobile è attaccata la cassa 2, di massa m_2 incognita. Si sa che la fune non scivola sulla gola delle pulegge, che le pulegge hanno massa trascurabile, che entrambi i tratti di fune che vanno o vengono alla puleggia B sono verticali e che tutti gli attriti sono trascurabili. [Usate il valore $g = 9.8$ m/s² per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $\cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $\sin(\pi/6) = 1/2$]



a) Quanto vale la massa della cassa 2, m_{2EQ} affinché il sistema sia in equilibrio (cioè le due casse siano ferme)? [Suggerimento: guardate per bene quali forze agiscono sulla puleggia B]

$m_{2EQ} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ kg $2m_1 \sin\theta = m_1 = 2.0$ kg [poiché la cassa m_1 è in equilibrio, la tensione della fune deve valere $T = m_1 g \sin\theta$. Due tensioni dello stesso modulo T , entrambe dirette verso l'alto, sono applicate alla puleggia B, per cui deve essere $m_2 g = 2T$. Mettendo tutto assieme si ottiene la soluzione]

b) Immaginate che, a un dato istante, la massa della cassa 2 raddoppi magicamente, diventando $m_2' = 2m_{2EQ}$, con m_{2EQ} calcolato sopra. In conseguenza, si osserva che la cassa 2 comincia a muoversi verso il basso, mentre la cassa 1 risale lungo il piano inclinato. Quanto vale, in modulo, la tensione T della fune?

$T = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ N $g(m_1 m_2' / (4m_1 + m_2'))(2 + \sin\theta) = (5/6)m_1 g = 16$ N [cominciamo con l'osservare che, quando la cassa 2 si sposta per un certo tratto Δy verso il basso, la cassa 1 risale lungo il piano inclinato per un tratto $\Delta s = 2\Delta y$. Infatti la fune è inestensibile e, per la geometria del sistema, quando la cassa 2 scende di un certo tratto, questo tratto si "ritrova sui due lati" della puleggia; quindi la cassa 1 viene richiamata verso l'alto del piano inclinato di un tratto di lunghezza doppia. La stessa relazione geometrica vale derivando rispetto al tempo le posizioni delle due casse (derivando solo una volta per ottenere le velocità o anche due volte per ottenere l'accelerazione), cioè si ha $v_1 = 2v_2$ e anche $a_1 = 2a_2$. Scriviamo ora le equazioni del moto delle due casse, scegliendo per la prima un riferimento diretto come il piano inclinato e orientato verso l'alto, e per la seconda un riferimento verticale orientato verso il basso. La scelta dei versi garantisce che le due accelerazioni abbiano lo stesso segno (quando la cassa 2 scende, la 1 sale). Si ha $a_1 = 2a_2 = -g \sin\theta + T/m_1$; $a_2 = g - 2T/m_2'$. Risolvendo per l'incognita T , che rappresenta il modulo della tensione, uguale lungo tutta la fune visto che la sua massa è trascurabile e anche che le pulegge hanno massa trascurabile, si ottiene la soluzione, dove si è tenuto conto che $m_2' = 2m_1$ e che $\sin\theta = 1/2$]

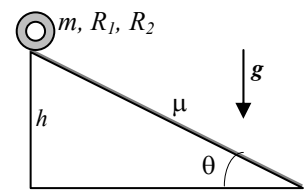
c) Quanto vale l'intervallo di tempo Δt necessario perché la cassa 2 scenda di un tratto $\Delta h = 0.15$ m partendo dalla posizione di equilibrio, in cui si trovava ferma?

$\Delta t = \dots\dots\dots \sim \dots\dots\dots$ s $(12\Delta h/g)^{1/2} \sim 0.43$ s [risolvendo le equazioni del moto per a_2 , si ottiene $a_2 = g - 2T/m_2' = g - 2T/(2m_1) = g/6$, dove abbiamo usato il risultato precedente. Il moto della cassa 2 è quindi uniformemente accelerato (l'accelerazione è evidentemente costante), per cui, considerando che essa parte da ferma, $\Delta h = (a_2/2)\Delta t^2$, da cui la soluzione, dove, naturalmente, si prende quella con il segno positivo]

d) Quanto vale la velocità v_2' che la cassa 2 possiede nell'istante in cui è scesa del tratto Δh di cui sopra?

$v_2' = \dots\dots\dots \sim \dots\dots\dots$ m/s $(g\Delta h/3)^{1/2} = 0.70$ m/s [a questa domanda si può rispondere usando la conservazione dell'energia meccanica, però, visto che abbiamo già scritto le equazioni del moto, conviene utilizzare quelle. In particolare deve essere $v_2' = a_2 \Delta t = (g\Delta h/3)^{1/2}$. Per esercizio, ragioniamo con la conservazione dell'energia meccanica, che vale essendo nullo il lavoro della forza di attrito (considerata trascurabile ovunque). Come già affermato, se la cassa 2 scende di Δh la cassa 1 risale il piano inclinato per il tratto $2\Delta h$. Di conseguenza è $\Delta U = -m_2' g \Delta h + m_1 g 2\Delta h \sin\theta = -m_1 g \Delta h$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato tutto quello che potevamo (relazione tra spostamenti, tra masse e anche il valore esplicito di $\sin\theta$). Inoltre la variazione di energia cinetica si scrive $\Delta E_k = (m_1/2)v_1'^2 + (m_2'/2)v_2'^2 = 3m_1 v_2'^2$, dove nell'ultimo passaggio si sono usate le relazioni tra velocità e masse delle due casse. Mettendo tutto assieme si ottiene lo stesso risultato riportato sopra]

2. Una ruota, modellabile come un cilindro cavo, con raggio esterno $R_2 = 20$ cm e raggio interno $R_1 = R_2/2$, è fatta di materiale omogeneo e ha una massa $m = 1.0$ kg. Questa ruota si trova inizialmente ferma sulla sommità di un piano inclinato, che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale e ha altezza $h = 5.0$ m; a un dato istante essa viene lasciata libera di muoversi con velocità iniziale nulla. La superficie del piano inclinato è scabra e presenta un coefficiente di attrito (sia statico che dinamico) $\mu = 0.40$. Salvo dove diversamente indicato, supponete che il piano inclinato sia fisso e trascurate altre forme di attrito. [Usate il valore $g = 9.8$ m/s² per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $\cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.7$ e $\sin(\pi/6) = 1/2$]



a) Determinate il valore del momento di inerzia I della ruota e discutete per bene, in brutta, se il suo moto è di rotolamento puro o no.

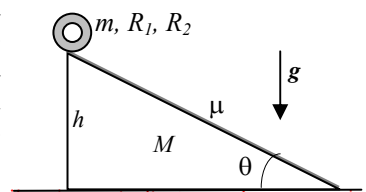
$I = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ kg m² $(5/8)mR_2^2 = 2.5 \times 10^{-2}$ kg m² [per un cilindro cavo si ha $I = (m/2)(R_1^2 + R_2^2)$, per cui, sfruttando la relazione tra i raggi interno e esterno, si ottiene $I = (5/8)mR_2^2$. La formula appena scritta può essere facilmente ricavata dalla definizione di I per un corpo continuo: $I = \int_{\text{volume}} r^2 dm = \int_{\text{volume}} r^2 \rho dV$. Nella simmetria cilindrica del corpo in questione, si ha $dV = 2\pi L r dr$, con L "lunghezza" (o altezza) del cilindro cavo. Inoltre, dato che il corpo è omogeneo, è $\rho = m/V = m/(\pi L(R_2^2 - R_1^2))$. Si ha quindi $I = 2\pi L m / (\pi L(R_2^2 - R_1^2)) \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr$, che, calcolando l'integrale, porta proprio alla formula citata]

Discussione: Le equazioni cardinali (equazioni del moto rotazionale e traslazionale del centro di massa) del cilindro si scrivono: $a_{CM} = g \sin\theta - F_A/m$ e $\alpha = F_A/(5/8)mR$, dove abbiamo usato un riferimento parallelo al piano inclinato e orientato verso il basso per la traslazione e abbiamo notato che l'unica forza che fa momento rispetto al polo, scelto sull'asse del cilindro, è la forza di attrito. Supponendo rotolamento puro si ha anche $a_{CM} = \alpha R_2$; il sistema di tre equazioni può essere risolto per F_A fornendo $F_A = (5/13)m g \sin\theta$ (e anche $a_{CM} = (8/13)g \sin\theta$). Perché il moto sia di rotolamento puro occorre che questa forza di attrito possa essere sviluppata dal contatto ruota/piano inclinato, che è in grado di produrre una $F_{A,MAX} = \mu N = \mu m g \cos\theta$. Si ottiene dunque una disequazione: $t g \theta \leq (13/5)\mu$. Numericamente questa disequazione è verificata e quindi il moto è di rotolamento puro.

b) Quanto vale la velocità angolare ω' che la ruota possiede quando giunge alla fine del piano inclinato?

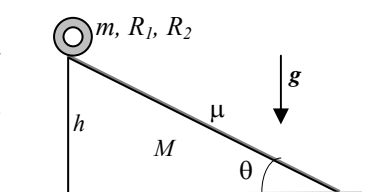
$\omega' = \dots \dots \dots \sim \dots \dots \dots \text{ rad/s; } (16gh/(13R_2^2))^{1/2} \sim 39 \text{ rad/s}$ [essendo il moto di rotolamento puro, non ci sono lavori dovuti a forze di attrito, per cui la risposta si può convenientemente determinare con la conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_k + \Delta U = (m/2)v_{CM}^2 + (I/2)\omega'^2 - mgh = (13/16)mR_2^2\omega'^2 - mgh$, dove abbiamo usato la relazione $\omega' = v_{CM}/R_2$ e espresso il momento di inerzia secondo quanto determinato sopra. Da qui la soluzione]

c) Immaginate ora che il piano inclinato sia **libero** di muoversi in direzione orizzontale (l'attrito tra la sua superficie di base e il piano orizzontale su cui appoggia è qui supposto trascurabile). Sapendo che la massa del blocco che costituisce il piano inclinato è $M = 2m$, quanto vale la velocità angolare ω'' della ruota (lasciata libera di scendere sul piano inclinato, come nella domanda precedente) in queste condizioni? [Sia ruota che piano inclinato sono fermi all'inizio; in questo caso imponete tout-court il moto di rotolamento puro per la ruota]



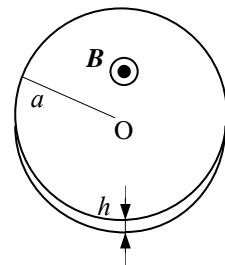
$\omega'' = \dots \dots \dots = \dots \dots \dots \text{ rad/s } (gh/R_2^2)^{1/2} = 35 \text{ rad/s}$ [dato che il piano inclinato può muoversi, comportandosi come una sorta di slitta, conviene considerare il sistema costituito da piano inclinato e ruota. Tale sistema è isolato in direzione orizzontale, visto che le forze esterne (peso e reazione vincolare del piano di appoggio) sono verticali. Di conseguenza si conserva la quantità di moto totale del sistema **in direzione orizzontale**. Essendo tutto fermo all'inizio, questo vuol dire che in qualsiasi istante deve essere $0 = mv_{CMX} + MV = mv_{CMX} + 2mV$, dove abbiamo usato la relazione tra le masse data nel testo. Notate che in questa espressione abbiamo ommesso i pedici che riguardano la velocità V del piano inclinato: infatti essa può essere solo diretta lungo l'asse orizzontale (qui chiamato X) e inoltre, non essendoci moto di rotazione, la velocità di traslazione è la stessa per ogni suo punto, per cui è inutile indicare che si tratta della velocità del centro di massa. Invece è importante sottolineare che nella conservazione della quantità di moto deve entrare solo la **componente orizzontale** di v_{CM} , cioè $v_{CMX} = v_{CM} \cos\theta$. Di conseguenza la relazione si scrive $0 = mv_{CM} \cos\theta + 2mV$, da cui $V = v_{CM} \cos\theta / 2$. Inoltre continua a valere la conservazione dell'energia meccanica, dato che non c'è attrito al contatto con il piano di appoggio. Stavolta, però, la conservazione si applica all'intero sistema, per cui deve comparire il termine di energia cinetica dovuta al moto del piano inclinato: $0 = \Delta E_k + \Delta U = (m/2)v_{CM}^2 + (M/2)V^2 + (I/2)\omega''^2 - mgh = (13/16)mR_2^2\omega''^2 + (M/2)V^2 - mgh = (13/16)mR_2^2\omega''^2 + mV^2 - mgh$, dove abbiamo usato la relazione tra le masse data nel testo e posto $v'_{CM} = \omega''R_2$ per il rotolamento puro della ruota. Usando la relazione tra le velocità data dalla conservazione della quantità di moto si ottiene $0 = (16/16)mR_2^2\omega''^2 - mgh$, avendo anche esplicitato il valore di $\cos\theta$. Da qui la soluzione, dove si vede che la velocità angolare della ruota è ora inferiore rispetto a prima, come atteso per la conservazione dell'energia (parte della differenza di energia potenziale viene usata per il moto del piano inclinato, cioè va a finire in energia cinetica del blocco di massa M)]

d) Infine immaginate che, invece, ci sia attrito **statico**, con coefficiente μ_s **incognito**, tra la superficie di base del piano inclinato e il piano orizzontale di appoggio. Si esegue sempre la stessa operazione di prima, cioè la ruota viene fatta partire da ferma dalla sommità del piano inclinato, lungo il quale discende muovendosi di rotolamento puro. Questa volta la domanda è: quanto deve valere, **al minimo**, il coefficiente di attrito $\mu_{s,MIN}$ tra superficie di base del piano inclinato e piano orizzontale di appoggio affinché il piano inclinato **non** si muova?



$\mu_{s,MIN} = \dots \dots \dots \sim \dots \dots \dots (8/39)\sin\theta\cos\theta \sim 0.089$ [il piano inclinato è inizialmente fermo, e per metterlo in moto deve subire un'accelerazione in direzione orizzontale. Forze che agiscono sul piano inclinato e hanno componenti in direzione orizzontale sono: la forza di attrito F_A tra piano inclinato e ruota e la reazione vincolare N tra ruota e piano inclinato, **cambiate di segno** poiché qui occorre considerare le forze che agiscono **sul** piano inclinato. Le componenti orizzontali di queste forze si ottengono proiettando in direzione orizzontale, ovvero moltiplicando rispettivamente per $\cos\theta$ e $\sin\theta$, come si verifica facilmente con un disegno. D'altra parte i moduli di queste forze sono noti: si ha $N = mg\cos\theta$ e $F_A = (5/13)mg\sin\theta$, come determinato nella risposta precedente. Dunque complessivamente agisce sul piano inclinato in direzione orizzontale la forza $F = mg\sin\theta\cos\theta - (5/13)mg\sin\theta = (8/13)mg\sin\theta\cos\theta$, dove il segno positivo indica che la componente della forza punta verso la sinistra di figura (in questo verso tenderebbe a muoversi il blocco che costituisce il piano inclinato). Affinché il piano inclinato non si muova, occorre che questa forza (in modulo, ma essendo positiva la precisazione è superflua) sia minore di quella di attrito statico F_{AS} esercitata al contatto tra superficie inferiore del piano e piano orizzontale di appoggio, cioè $F \leq F_{AS}$. D'altra parte è $F_{AS} \leq \mu_s(m+M)g = \mu_s 3mg$. Il valore minimo di μ_s si trova sostituendo la disequazione con un'uguaglianza: così si ottiene la soluzione]

3. Un disco omogeneo di raggio $a = 25$ cm e spessore $h = 1.0$ cm è fatto di materiale conduttore con resistività $\rho_C = 1.0 \times 10^{-2}$ ohm m. Il disco si trova fermo e fisso in una regione di spazio in cui insiste un campo magnetico esterno \mathbf{B} uniforme su tutta la faccia del disco e diretto ortogonalmente a essa, come rappresentato in figura (“esce dal foglio”). Questo campo magnetico è funzione del tempo: si sa che per $t < 0$ esso valeva $B_0 = 5.0 \times 10^{-2}$ T (costante), e che quindi a partire dall’istante $t = 0$ esso viene spento, diminuendo **linearmente con il tempo** fino ad annullarsi in un intervallo di tempo $\Delta t = 5.0$ ms.



- a) Determinate la funzione $B(t)$ che stabilisce il valore del modulo di \mathbf{B} in funzione del tempo generico t , limitandovi a considerare l’intervallo $0 < t < \Delta t$. [Dovete scrivere una funzione, dunque non usate valori numerici]

$B(t) = \dots\dots\dots B_0(1-t/\Delta t)$ [si vede subito che questa funzione vale B_0 per $t = 0$ e poi diminuisce linearmente nel tempo fino a zero per $t = \Delta t$]

- b) Determinate direzione, verso e modulo del campo elettrico $E(t)$ indotto dal campo magnetico **in ogni punto** interno al disco, spiegando per bene il ragionamento seguito. [Anche qui limitatevi a considerare l’intervallo $0 < t < \Delta t$; anche qui dovete scrivere una funzione, dunque non usate valori numerici]

Direzione e verso (e spiegazione): Al campo magnetico variabile nel tempo è ovviamente associato un flusso di campo magnetico anche variabile nel tempo. La geometria del problema suggerisce di considerare come superficie su cui calcolare il flusso quella di cerchi coassiali al disco e di raggio r generico compreso tra 0 e a . Visto che il campo è uniforme e orientato ortogonalmente alla superficie, il flusso risulta $\Phi(\mathbf{B}(t)) = \pi r^2 B_0(1-t/\Delta t)$. Per la legge di Faraday tale flusso di campo magnetico variabile nel tempo genera una forza elettromotrice sulla linea che costituisce il perimetro del cerchio considerato. Dunque il campo elettrico, che è tangente alla linea di circuitazione, risulta avere direzione tangenziale. Il verso può essere stabilito ricordando che, per la legge di Faraday (qualche volta detta anche legge di Lenz), la corrente indotta (creata dal campo elettrico indotto) deve essere orientata in modo tale da creare un campo magnetico (indotto) la cui variazione di flusso si oppone alla variazione di flusso del campo magnetico esterno. Preso come positivo il segno del flusso che corrisponde al campo magnetico uscente dal foglio, come in figura, il campo indotto dovrà avere lo stesso verso del campo esterno in modo da compensarne la variazione di flusso. Dunque anche il campo magnetico indotto risulta essere uscente dal foglio. Applicando la regola della mano destra, versione ciao ciao, la corrente, e quindi il campo elettrico che la genera, devono avere verso antiorario rispetto alla figura.

$E(t) = \dots\dots\dots B_0 r / (2\Delta t)$ [la legge di Faraday stabilisce, trascurando i segni che ci raccontano qual è il verso del campo, vedi sopra, dice $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -d\Phi(\mathbf{B}(t))/dt$. L’integrale di linea è una circuitazione e, sulla base di quanto stabilito sopra, vale $E 2\pi r$. Al secondo membro, svolgendo la derivata, si ottiene $\pi r^2 B_0 / \Delta t$: da qui la soluzione. Notate che il modulo del campo risulta costante nel tempo (per l’intervallo considerato, fuori da questo intervallo fa zero, essendo il campo magnetico e il suo flusso costanti), ma dipende dalla posizione radiale r . Per simmetria, ovviamente, il campo elettrico non dipende dalla “quota” (posizione lungo l’asse del disco) a cui si fa riferimento]

- c) Quanto vale l’intensità di corrente indotta I che scorre all’interno del disco?

$I = \dots\dots\dots = \dots\dots A \quad B_0 h a^2 / (4\Delta t \rho_C) = 0.16 A$ [essendo nota la resistività del materiale, conviene servirsi della relazione microscopica tra \mathbf{E} (quello trovato sopra) e \mathbf{j} (densità di corrente). Infatti si ha $\mathbf{j} = \mathbf{E} / \rho_C$, per cui la corrente indotta ha stessa direzione e verso del campo elettrico, cioè è tangenziale antioraria. Per definizione, è $I = \Phi(\mathbf{j})$, dove il flusso si intende calcolato su una sezione attraversata dalla corrente. Nel nostro caso, conviene scegliere tale sezione in direzione ortogonale rispetto a quella (tangenziale) della corrente. Dunque prendiamo la sezione rappresentata dal rettangolo di altezza h e lati collocati rispettivamente in $r = 0$ e $r = a$. All’interno di questo rettangolo la densità di corrente è uniforme muovendosi lungo l’altezza, ma non uniforme muovendosi lungo la direzione radiale. Per determinare l’integrale di superficie che è dentro la definizione di flusso occorre suddividere il rettangolo in tanti rettangolini di altezza h e larghezza infinitesima dr e quindi sommare, ovvero integrare. Si ha allora $I = \int_{\text{SUP}} (\mathbf{E} / \rho_C) dS = \int_0^a (\mathbf{E} / \rho_C) h dr = (B_0 h / (2\Delta t \rho_C)) \int_0^a r dr = B_0 h a^2 / (4\Delta t \rho_C)$, che rappresenta la risposta. Un modo alternativo è quello di considerare la fem su tanti anelli circolari di raggio r generico, spessore infinitesimo dr e altezza h . Tale fem vale, sulla base di quanto ottenuto prima, $\pi r^2 B_0 / \Delta t$. La resistenza dell’anello può essere calcolata come $\rho_C 2\pi r / (h dr)$, per cui la corrente che fluisce in un anello generico può essere espressa $(B_0 r / (2\Delta t \rho_C)) dr$; integrando tra 0 e a si ottiene la stessa risposta di prima]

Nota: l’esito della prova sarà pubblicato sul sito web del docente, <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | (4 caratteri alfanumerici).