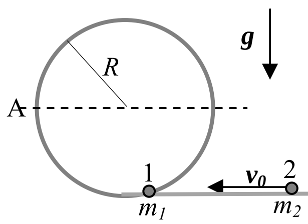
Corso di Laurea Ing. E-A – ESAME DI FISICA GENERALE - 12/6/2015

Nome e cognome: …………………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate “brutte copie” o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Avete un giochino per bambini (di qualche decennio fa…) che consiste nel far percorrere un “giro della morte” a delle automobiline considerate **puntiformi**. Il giro della morte è realizzato con una guida fissa e indeformabile, di forma circolare e raggio R = 10 cm, che è disposta su un piano verticale. L’automobilina 1, di massa $m_1 = m$ = 0.16 kg, si trova ferma su un tratto orizzontale della guida alla “base” del giro della morte (vedi figura). L’automobilina 2, di massa $m_2 = m/2$ = 80 g, viene lanciata contro l’automobilina 1 avendo una velocità orizzontale di modulo v_0 (incognito). L’urto tra le due automobiline può essere considerato puramente **elastico** e in seguito all’urto si osserva che l’automobilina 1 prende a percorrere il giro della morte. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell’accelerazione di gravità; ogni forma di attrito può essere considerata **trascurabile**]



a) Nel giochino, si osserva che la velocità della automobilina 2 (quella che urta) subito prima dell’urto deve essere, in modulo, $v_0 > v_{0MIN}$, affinché l’automobilina 1 (quella urtata) possa percorrere per intero il giro della morte. Quanto vale v_{0MIN}? [Spiegate per bene il procedimento in brutta!]

v_{0MIN} = …………………………………… ~ .... m/s $(3/2)(5gR)^{1/2}$ ~ 3.3 m/s [l’esercizio prevede fasi distinte (l’urto, l’ascesa della automobilina 1 lungo il percorso, il completamento del giro della morte). Conviene partire dalla “fine”. Il punto “cruciale” del giro della morte è ovviamente il punto più alto: se l’automobilina 1 arriva in questa posizione rimanendo “a contatto” con la guida, allora essa percorrerà per intero il giro della morte. Poiché la guida ha forma circolare, l’automobilina 1 risentirà, quando passa per questa posizione, di un’accelerazione centripeta di modulo v^2/R , con v il modulo della sua velocità **al passaggio per il punto più alto della guida**. L’accelerazione centripeta ha direzione radiale orientata verso il centro di curvatura, che, per la posizione considerata, coincide con la direzione verticale orientata verso il basso. Dunque l’accelerazione centripeta deve essere fornita da forze dirette verticalmente verso il basso. Queste forze sono il peso m_1g e l’eventuale reazione vincolare di modulo N , anch’essa diretta verso il basso perché l’automobilina è a contatto della guida “dal basso” (difficile spiegare a parole, ma, se ci pensate, è facilissimo capire cosa si intende…). Dunque deve essere $v^2/R = g + N/m_1$. Come suggerisce l’esercizio, e anche la vostra esperienza comune, esiste una velocità minima (**in quella posizione**) tale che l’automobilina possa percorrere il giro della morte. Infatti la reazione vincolare, benché non possa cambiare verso, può aggiustare il suo modulo in funzione dell’accelerazione centripeta necessaria al corpo. Al minimo essa può essere nulla (questo avviene proprio quando inizia a mancare il contatto tra automobilina e guida, quindi in condizioni limite per la percorrenza del giro della morte): di conseguenza $v^2_{MIN} = gR$. Affinché l’automobilina 1 arrivi alla sommità del percorso con questa velocità v_{MIN} , essa dovrà avere una certa velocità minima v_{1MIN}' quando comincia a muoversi, cioè subito dopo l’urto. Questa velocità può essere determinata usando la conservazione dell’energia meccanica, che si applica essendo trascurabili gli attriti (attenzione: la conservazione si applica al solo moto della automobilina 1 successivo all’urto, quello che succede nell’urto lo discuteremo fra poco!). Si ha quindi $0 = \Delta E_k + \Delta U = (m_1/2)(v^2_{MIN} - v_{1MIN}'^2) + 2m_1gR$, dove abbiamo notato che la variazione di energia potenziale è dovuta alla variazione di quota, pari a $2R$, dell’automobilina 1. Sostituendo l’espressione di v^2_{MIN} trovata sopra, si ottiene $v_{1MIN}'^2 = 5gR$. L’automobilina 1 deve avere alla base del giro della morte, cioè subito dopo l’urto, una velocità superiore a questa v_{1MIN}' affinché essa possa percorrere il giro della morte per intero. A questo punto possiamo finalmente esaminare l’urto. Esso è elastico, dunque si conserva l’energia **cinetica del sistema** delle due automobiline e inoltre, non essendoci forze esterne impulsive in direzione orizzontale, si conserva pure la quantità di moto **totale del sistema**. Quest’ultima condizione implica $m_2v_0 = m_1v_1' + m_2v_2'$, con v_2' velocità della automobilina 2 subito dopo l’urto. Tenendo conto della relazione tra le masse, si ottiene $mv_0 = 2mv_1'+mv_2'$, ovvero $v_2' = v_0-2v_1$. La conservazione dell’energia cinetica del sistema recita $(m_2/2)v_0^2 = (m_1/2)v_1'^2+(m_2/2)v_2'^2$, ovvero, usando la relazione tra le masse, $v_0^2 = 2v_1'^2+v_2'^2 = v_0^2 + 6v_1'^2-4v_0v_1'$, dove nell’ultimo passaggio abbiamo espresso v_2' in funzione di v_1' secondo quanto stabilito prima dalla conservazione della quantità di moto totale, e abbiamo anche sviluppato un binomio quadrato. Riarrangiando si ha $0 = 2v_1'(3v_1'-2v_0)$. Questa equazione ha due soluzioni: escludendo quella banale $v_1' = 0$, che significherebbe che l’automobilina 1 non viene “centrata” dalla 2 rimanendo quindi ferma, si ottiene $v_1' = (2/3)v_0$. Prendendo come v_1' il valore “minimo” determinato prima, che ovviamente corrisponde a un valore minimo anche per v_0 , si ottiene la soluzione]

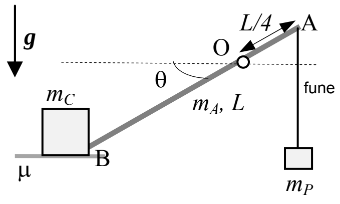
b) Quanto vale la velocità v_2' della **automobilina 2 subito dopo l’urto**? [Esprimete anche il verso; ovviamente per questa risposta dovete considerare che la velocità v_0 sia la v_{0MIN} determinata al punto precedente]

v_2' = …………………………………… ~ .... m/s $v_{0MIN}-2v_1' = v_{0MIN}-(4/3)v_{0MIN} = -v_{0MIN}/3$ ~ -1.1 m/s [si ottiene facilmente dalla conservazione della quantità di moto, come scritto nella soluzione del quesito precedente. Il segno negativo che si ottiene indica che l’automobilina 2 subito dopo l’urto si muove in verso contrario rispetto a quello in cui si muoveva subito prima dell’urto stesso (“rimbalza e torna indietro”)]

c) Quanto vale, **in modulo**, l’accelerazione a_A che l’automobilina 1 possiede nell’istante in cui essa passa per il punto A indicato in figura? [Quando passa per il punto A, l’automobilina 1 ha percorso “un quarto” del giro della morte. Anche qui, ovviamente, dovete supporre valide le condizioni considerate prima, cioè che la velocità v_0 sia la v_{0MIN} determinata prima]

a_A = ………………………………… ~ ……… m/s^2 $(g^2 + (3g)^2)^{1/2} = 10^{1/2}g$ ~ 31 m/s^2 [quando l’automobilina passa per la posizione indicata essa si sta muovendo su una circonferenza di raggio R , e quindi deve essere sottoposta a un’accelerazione centripeta v_A^2/R , con v_A velocità dell’automobilina 1 al passaggio per la posizione indicata. Inoltre essa è sottoposta all’accelerazione di gravità. Poiché le due accelerazioni sono dirette ortogonalmente tra loro, **il modulo** dell’accelerazione è $a = (g^2 + v_A^2/R)^{1/2}$. Per trovare la velocità v_A' si deve ovviamente impiegare la conservazione dell’energia meccanica, come fatto più in precedenza. La via più breve consiste nel tenere conto che la velocità alla sommità del giro della morte deve essere, nelle condizioni (limite) considerate, $v^2 = gR$ (vedi sopra!) e che la variazione di quota tra la posizione A e la sommità dà luogo a una variazione di energia potenziale (della forza peso) $\Delta U = m_1gR$. Si ricava facilmente $v_A^2 = 3gR$, da cui la soluzione]

2. Una sottile asta **omogenea**, di lunghezza L = 2.0 m e massa $m_A = m$ = 3.0 kg, è imperniata nel punto O che dista $L/4$ dall’estremo A (vedi figura) dell’asta stessa. L’asta può ruotare su un piano verticale con attrito **trascurabile** attorno a O. All’estremo A è attaccata una fune inestensibile e di massa trascurabile che termina con un peso di massa $m_P = 2m$ = 6.0 kg; l’estremo B (vedi figura), invece, è a contatto con una cassa di massa m_C incognita. Questa cassa è appoggiata su un piano orizzontale scabro, con coefficiente di attrito statico μ = 0.50. Nelle condizioni di figura asta e tutto il resto sono in **equilibrio** e l’angolo tra asta e direzione orizzontale vale θ = π/6. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell’accelerazione di gravità e ricordate che $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2}$ ~ 1.73 e $sin(\pi/6) = 1/2$]



a) Determinate il valore **minimo** m_{CMIN} di m_C che permette l’equilibrio come descritto nel testo. Determinate inoltre quanto vale, nelle stesse condizioni, **il modulo** della forza F_O che il perno esercita sull’asta. [Spiegate per bene, in brutta, il procedimento]

m_{CMIN} = …………………………………… ~ .... kg $m/(3\mu tg\theta)$ ~ 3.5 kg [se non ci fosse la cassa l’asta ruoterebbe in senso orario (rispetto alla figura). Infatti essa sarebbe sottoposta a due momenti di forza rispetto al polo O, quello della tensione T della fune, che ha braccio $(L/4)cos\theta$ e tende a far ruotare in senso orario l’asta, e quello della forza peso m_Ag dell’asta, applicata al centro di massa (a metà dell’asta), che ha braccio analogo e tende a far ruotare in senso antiorario (rispetto alla figura) l’asta. Poiché tutto è in equilibrio, la tensione della fune è $T = m_Pg$. Dunque, prendendo come positivo il momento delle forze che fa ruotare l’asta in senso orario, si ha che il momento delle forze complessivo è $(m_P-m_A)g(L/4)cos\theta = mg(L/4)cos\theta$, dove abbiamo tenuto conto della relazione tra le masse. Per avere equilibrio rotazionale, deve esistere almeno un altro momento di forze di segno opposto. Tale momento di forze è dato dalla forza (di reazione vincolare) N_A che la parete laterale della cassa esercita sull’asta. Questa forza è orizzontale (è ortogonale alla parete laterale della cassa) e diretta verso la destra di figura, per cui il momento che ne risulta (rispetto al polo O) tende effettivamente a produrre una rotazione in senso antiorario. Il braccio di questa forza vale $(3/4)L\ sin\theta$. Non ci sono atre forze in grado di produrre momenti per cui l’equilibrio si ottiene quando $N_A(3/4)Lsin\theta = mg(L/4)cos\theta$, ovvero N_A =

$mg/(3tg\theta)$. In condizioni di equilibrio è chiaro che, se N_A è la forza che la parete laterale della cassa esercita sull'asta, l'asta esercita sulla parete laterale della cassa, e quindi sulla cassa stessa, una forza uguale e opposta, che tenderebbe a far muovere in senso orizzontale, verso la sinistra di figura, la cassa. Perché questo non avvenga deve esserci una sufficiente forza di attrito statico F_A tra parete di sotto alla cassa e piano scabro. In sostanza, quindi, $N_A = mg/(3tg\theta) = F_A \le \mu m_C g$, dove abbiamo tenuto conto che l'attrito è statico (il segno di minore/uguale) e che esso è prodotto dal contatto della cassa con il piano, dove si sviluppa una reazione vincolare di modulo $m_C g$ orizzontale (le forze "scambiate" con l'asta sono orizzontali ed è come se non ci fossero…). Riorganizzata, la disequazione recita $m_C \ge m/(3\mu tg\theta)$. Il valore minimo richiesto dal testo si ottiene ovviamente quando la disequazione diventa un'uguaglianza, da cui la soluzione]

F_O = …………………………………… ~ .... N $mg(28/3)^{1/2} \sim 90$ N [il perno serve a vincolare il moto dell'asta, cioè a rendere possibile (eventualmente!) solo il suo moto di rotazione. Pertanto esso deve produrre forze che garantiscano l'equilibrio traslazionale, ovvero che "bilancino" le forze applicate all'asta. Queste forze sono: il suo peso, $m_A g$ e la tensione $T = m_P g$, entrambi verticali e dirette verso il basso, e la forza $N_A = mg/(3tg\theta)$ che la cassa esercita sull'asta. Questa forza è orizzontale. Per trovare il modulo di F_O è quindi sufficiente sommare i quadrati delle componenti verticali e orizzontali delle forze applicate all'asta (ed estrarre la radice quadrata): $F_O = (((m_A g+m_P)g)^2+(mg/(3tg\theta))^2)^{1/2} = mg(3^2+1/(3tg\theta)^2)^{1/2}$, da cui, tenendo conto del valore dell'angolo e delle sue grandezze trigonometriche, la soluzione]

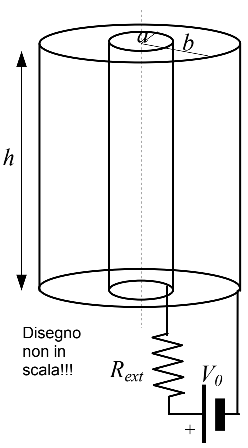
b) A un dato istante arriva il Mago Silvan che fa scomparire istantaneamente la cassa: di conseguenza l'equilibrio non c'è più e l'asta comincia a ruotare (ovviamente anche il peso si muove!). Quanto vale la velocità angolare ω dell'asta nell'istante in cui il suo asse passa per la direzione orizzontale? [Supponete trascurabile ogni possibile forma di attrito e tenete conto che la fune che collega l'estremità dell'asta al peso resta sempre tesa]

ω = ………………….……………….. ~ ……….. rad/s; $(12g/(13L))^{1/2} \sim 2.1$ rad/s [visto che gli attriti sono trascurabili, si conserva l'energia meccanica: $0 = \Delta E_k + \Delta U$. La variazione di energia potenziale è dovuta alla variazione di quota del centro di massa dell'asta, che nel processo considerato si **alza** di un tratto $(L/4)sin\theta$, e del peso, che nello stesso processo si **abbassa** della stessa quantità. Dunque $\Delta U = (m_A-m_P)g(L/4)sin\theta = -mg(L/4)sin\theta$. La variazione di energia cinetica, ovvero l'energia cinetica all'istante considerato (inizialmente tutto era fermo!), è dovuta alla rotazione dell'asta e al movimento del peso, per cui $\Delta E_K = (m_P/2)v^2+(I/2)\omega^2$. La velocità del peso nell'istante considerato è verticale e, essendo la fune tesa, deve essere uguale alla velocità tangenziale dell'estremo A dell'asta, cioè $v = \omega L/4$. Inoltre il momento di inerzia dell'asta, da calcolare ovviamente rispetto al polo O, può essere facilmente determinato con il teorema degli assi paralleli a partire dal momento di inerzia $(m_A/12)L^2$ per rotazioni attorno a un asse che passa per il centro di massa : $I = (m_A/12)L^2+m_A(L/4)^2 = (7/48)mL^2$. Dunque $\Delta E_K = m\omega^2(7/96+2/32)L^2 = (13/96)\, m\omega^2 L^2$. Mettendo tutto assieme e esplicitando il valore di $sin\theta$ si trova la soluzione]

c) Nell'istante in cui l'asse dell'asta passa per la direzione orizzontale, il solito Mago Silvan si diverte a far scomparire (istantaneamente) il peso m_P . Quanto vale la velocità angolare ω' dell'asta **subito dopo** la magia? [Suggerimento: individuate le grandezze meccaniche del sistema che potrebbero ragionevolmente, benché magicamente, conservarsi nella magia…]

ω' = ……………………………….. ~ ……….. rad/s $(13/7)\omega \sim 3.9$ rad/s [le magie hanno poco a che vedere con gli esercizi di Fisica, però si possono fare delle ipotesi e, razionalmente, provare a verificarle. Visto che l'esercizio fa domande relative a un processo molto breve (istantaneo), non ha molto senso occuparsi dell'eventuale conservazione dell'energia: la magia potrebbe essere tale da modificare l'energia, ma gli effetti di questa modifica non sarebbero facilmente osservabili nella dinamica del sistema, visto che l'eventuale lavoro conseguente alla modifica dell'energia richiederebbe del tempo per avere luogo, e qui il tempo non viene dato. Potrebbe essere che si conservi la quantità di moto, che prima della magia è dovuta al moto del peso. Però il perno potrebbe esercitare delle forze (impulsive) che anche nel breve intervallo di tempo considerato potrebbero produrre degli effetti sull'asta. Infatti il sistema non può essere considerato isolato a causa della presenza del perno e delle forze impulsive da esso eventualmente esercitate sull'asta. Queste forze avrebbero però braccio nullo (considerando il perno come polo), per cui siamo certi che il momento angolare si conservi. Prima della magia, il momento angolare è dovuto alla rotazione dell'asta, con un contributo $I\omega$, e alla traslazione del peso, con un contributo $m_P v(L/4)$, con v determinata sopra, dove abbiamo notato che il "braccio" della quantità di moto, cioè la distanza tra polo e **direzione** della quantità di moto o della velocità, è $L/4$. Tenendo conto di tutto quanto determinato in precedenza, abbiamo quindi che prima della magia il momento angolare complessivo vale $(7/48)mL^2\omega + 2m(\omega L/4)(L/4) = (13/48)mL^2\omega$. Dopo la magia, essendo scomparso il peso, il momento angolare è solo dovuto alla rotazione dell'asta, per cui si può esprimere come $I\omega' = (7/48)mL^2\omega'$. Supponendo valida la conservazione del momento angolare si ottiene la soluzione]

3. Avete un condensatore le cui armature sono due gusci **cilindrici** sottili, coassiali fra loro e fatti di materiale ottimo conduttore. I due gusci hanno la stessa altezza, h = 10 cm, e raggi pari rispettivamente a a = 2.0 mm e $b = 2a$ = 4.0 mm. Come rappresentato in figura, essi sono collegati a un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 2.0x10^2 V con l'interposizione di un resistore "esterno" di resistenza R_{ext} = 50 kohm. Inizialmente lo spazio tra i gusci, ovvero tra le armature del condensatore, è vuoto. [Usate ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto; osservate che le dimensioni del sistema sono tali da poter trascurare gli "effetti ai bordi"; considerate **condizioni stazionarie**]



a) Determinate direzione e verso del campo elettrico **E** nella regione tra le armature e scrivete la **funzione** $E(r)$ che stabilisce il modulo del campo elettrico per r generico (tale che $a < r < b$). [Dovete scrivere una funzione, dunque non usate valori numerici ma servitevi dei dati **noti** del problema indicandoli con i rispettivi simboli; spiegate in brutta anche i **dettagli** del procedimento. Può farvi comodo ricordare che, per una variabile generica ξ , si ha $\int(1/\xi)d\xi = ln(\xi)$]

Direzione e verso: …………………….. Il campo elettrico ha direzione radiale e, per come sono collegati i poli del generatore, è diretto dal guscio "interno" a quello "esterno". Un modo elegante per dimostrare il carattere radiale, a parte appellarsi a (generici) motivi di simmetria, consiste nel considerare che, per la forma cilindrica del sistema, tutte le grandezze che hanno a che fare con il sistema stesso non dipendono dalla coordinata "tangenziale". Tra queste grandezze c'è il potenziale elettrico, per cui le superfici equipotenziali devono essere delle superfici cilindriche coassiali con le armature. Poiché il campo elettrico deve essere ortogonale alle superfici equipotenziali, la sua direzione è essere radiale.

$E(r)$ = …………………………………. $V_0/(ln(b/a)\, r)$ [come stabilito sopra, il campo è radiale; inoltre, se deve dipendere da qualche coordinata spaziale, può dipendere solo da quella radiale (qui stiamo sfruttando anche l'affermazione del testo sugli "effetti ai bordi"). La sua espressione si può trovare con Gauss usando per scatola un barattolo, coassiale ai gusci e con altezza pari a quella dei gusci, e di raggio r **generico** compreso tra i raggi dei gusci. Il campo elettrico, essendo radiale, attraversa solo la superficie laterale di questo barattolo e poiché questa superficie laterale ha raggio r fissato, il campo elettrico è anche uniforme su tutta la superficie. Allora il flusso attraverso la scatola si scrive $ES_{LAT} = E(2\pi hr)$. Indicando con Q la carica che si trova, in condizioni stazionarie, sull'armatura interna, dunque la carica interna alla scatola, si ha che $E(r) = Q/(2\pi\varepsilon_0 hr)$. Questa relazione è corretta, ma, oltre alla variabile r , contiene Q che non è un dato del problema. Tuttavia si sa che, per un campo radiale, $\Delta V = -\int Edr$, dove l'integrale deve essere calcolato tra due diversi raggi. Si sa che tra a e b la differenza di potenziale è pari a $-V_0$, dove il segno meno tiene conto del fatto che l'armatura esterna, quella dove "termina" l'integrale di linea, è a potenziale minore rispetto a quella interna, dove "comincia" l'integrale di linea. Inoltre si sa che in condizioni stazionarie non c'è passaggio di corrente attraverso la resistenza R_{ext} , dato che si assume che il condensatore sia carico. Di conseguenza non c'è "caduta di potenziale" sulla resistenza e le armature del condensatore si trovano effettivamente alla differenza di potenziale sancita dal generatore. Usando l'espressione funzionale del campo elettrico trovata prima ed eseguendo l'integrale si ottiene $V_0 = (Q/(2\pi\varepsilon_0 h))ln(b/a)$, da cui $Q = V_0\,(2\pi\varepsilon_0 h)/ln(b/a)$. Ovviamente lo stesso risultato si poteva ottenere anche ricordando a memoria l'espressione della capacità per un condensatore "cilindrico" come quello considerato. Sostituendo l'espressione di Q nella relazione data dal teorema di Gauss si ottiene la soluzione]

b) Immaginate ora che lo spazio tra i gusci, ovvero tra le armature, venga riempito di materiale **debolmente** conduttore con resistività incognita ρ_C : in queste condizioni il sistema dei due gusci con il materiale in mezzo si comporta come un resistore di resistenza R' (incognita). Sapendo che in queste condizioni il generatore eroga una corrente di intensità I = 1.0 mA, quanto vale R' ?

R' = …………………………………… = ……… ohm $V_0/I - R_{ext}$ = 1.5x10^5 ohm [il circuito è costituito dalla serie $R+R'$ collegata al generatore. Deve quindi essere $V_0 = (R+R')I$, da cui la soluzione]

c) Determinate la resistività ρ_C del materiale che riempie lo spazio fra i gusci [Può farvi comodo ricordare che $ln(2) \sim 0.69$]

ρ_C = ……………………………………~ ……… ohm m $(V_0/I)\ (2\pi\varepsilon_0 h)/ln(b/a)$ ~ $1.6\text{x}10^{-6}$ ohm m [all'interno del sistema considerato, la corrente scorre nella stessa direzione del campo elettrico, cioè è radiale e va dall'armatura interna a quella esterna. Inoltre è noto che l'intensità di corrente è definita come flusso della densità di corrente $\boldsymbol{j}$ su una superficie che intercetta tutte le linee di flusso di corrente. D'altra parte la relazione microscopica tra $\boldsymbol{E}$ (quello trovato sopra) e $\boldsymbol{j}$ (densità di corrente) recita $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{E}/\rho_C$, per cui la superficie in questione è la sola superficie laterale della scatola considerata prima e $I = j\ (2\pi\varepsilon_0 hr) = E\ (2\pi\varepsilon_0 hr)/\ \rho_C\ = Q/\rho_C$. La carica Q qui indicata è la stessa determinata sopra, per cui $I = V_0\ (2\pi\varepsilon_0 h)/(\rho_C\ ln(b/a))$, da cui la soluzione]