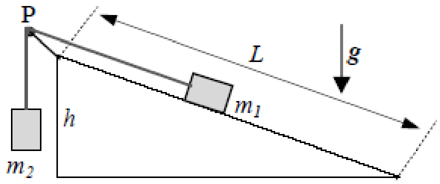
Corso di Laurea Ing. E-A – ESAME DI FISICA GENERALE - 22/7/2015 ("sdoppiato")

Nome e cognome: ……………………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*



1. Una cassa di massa $m_1 = m = 6.0$ kg si trova su un piano inclinato, di altezza $h = 3.0$ m e lunghezza $L = 3h = 9.0$ m, su cui può scorrere con **attrito trascurabile**. Alla cassa è attaccato l'estremo di una fune inestensibile e di massa trascurabile al cui altro estremo si trova un *peso* di massa m_2 incognita, libero di muoversi in direzione verticale. La fune, dopo un tratto in cui si trova parallela al piano inclinato, può scorrere con **attrito trascurabile** attorno a un perno (indicato con P in figura) montato sulla sommità del piano inclinato stesso. [Usate $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

   a) Qual è il valore m_{2EQ} della massa del *peso* che garantisce l'equilibrio? Quanto vale nelle condizioni di equilibrio, il modulo della forza F_P che la fune esercita sul perno? ? [Per *peso* si intende la massa m_2, quella libera di muoversi in direzione verticale!]

   m_{2EQ} = …………………………………… = ……… kg $m_1h/L = m/3 = 2.0$ kg [cominciamo con il notare che, per semplici ragioni geometriche, l'angolo θ tra piano inclinato e orizzontale è tale che $\sin\theta = h/L = 1/3$, $\cos\theta = (1 - \sin^2\theta)^{1/2} = 8^{1/2}/3$, $tg\theta = 1/8^{1/2}$, in modo da poter impiegare nella risoluzione l'espressione dell'angolo. All'equilibrio la tensione della fune deve valere $m_{2EQ}g$ e questa forza deve essere pari alla componente della forza peso della cassa nella direzione del piano inclinato, $m_1g\sin\theta = m_1gh/L$, da cui la risposta]

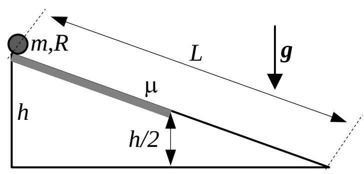
   F_P = …………………………………… ~ ……… N $(mg/9)24^{1/2} \sim 32$ N [la fune esercita sul perno una forza data dalla sovrapposizione (somma vettoriale) delle tensioni che essa "trasmette" nei suoi due tratti. Il modulo di queste tensioni è lo stesso e vale (vedi sopra) $T = m_{2EQ}g = mg/3$, ma la loro direzione è differente, essendo verticale (verso il basso) per il tratto che termina con il peso e orientata come il piano inclinato e diretta verso il basso per il tratto che termina con la cassa. La forza è un vettore, e il suo modulo può essere facilmente determinato sommando in quadratura le componenti orizzontali e verticali delle tensioni. L'unica componente orizzontale vale $T\cos\theta$, mentre le componenti orizzontali valgono rispettivamente T e $T\sin\theta$. Si ha quindi $F_{PHOR} = T8^{1/2}/3$ e $F_{PVER} = T(1+1/3) = 4T/3$. Dunque $F_P = (T/3)(8+16)^{1/2}$, da cui la risposta]

   b) Supponete che a un dato istante la massa del peso si dimezzi magicamente e istantaneamente rispetto al valore all'equilibrio, cioè che diventi $m_2 = m_{2EQ}/2$ (con m_{2EQ} determinato al punto precedente). Quanto vale l'accelerazione a_2 con cui si muove il *peso*?

   a_2 = …………………………………… = ……… m/s^2 $g/7 = 1.4$ m/s^2 [occorre scrivere le equazioni del moto dei due corpi che si muovono. Visto che presumibilmente nel moto il peso salirà verso l'alto (la sua massa è minore rispetto al valore necessario per l'equilibrio!) e la cassa verso il basso, usiamo un riferimento verticale orientato verso l'alto per il peso e uno parallelo al piano e orientato verso il basso per la cassa. Si ha facilmente: $a_1 = g\sin\theta - T/m_1 = gh/L - T/m_1$, dove abbiamo espresso il seno dell'angolo con ipotenusa e cateto, e $a_2 = T/m_2 - g$. Poiché la fune è inestensibile, lo spostamento di uno dei due corpi è uguale, in modulo, a quello dell'altro, per cui $a_1 = a_2$. Risolvendo si ottiene $T = m_1 m_2 g(1+h/L)/(m_1+m_2)$, da cui la soluzione, dove si è tenuto conto che $m_2 = m_{2EQ}/2 = m/6$ (vedi risposta al quesito precedente)]

   c) Quanto vale la velocità v_2 che il *peso* possiede quando si è spostato di un tratto $\Delta h = h/3 = 1.0$ m? [Per evitare errori, cercate di capire in che verso si sposta il *peso*, cioè la massa m_2, quella libera di muoversi in direzione verticale]

   v_2 = …………………………………… ~ ……… m/s $(2gh/21)^{1/2} \sim 1.7$ m/s [sulla base di quanto osservato in precedenza, è ovvio che il peso si sposta verso l'alto (e la cassa verso il basso del piano inclinato). Avendo stabilito che il moto del peso è uniformemente accelerato con accelerazione a_2 determinata al punto precedente, il modo più immediato per rispondere consiste nell'usare le leggi del moto uniformemente accelerato che, tenendo conto delle condizioni iniziali, si scrivono $\Delta h = (a_2/2)t^2$ e $v_2 = a_2t = (2a_2\Delta h)^{1/2}$, da cui la soluzione. Un modo altrettanto valido, ma un po' più laborioso come conti, consiste nel conservare l'energia meccanica del sistema, grazie all'assenza di attriti: $0 = \Delta E_K + \Delta U_G$. In questa espressione è $\Delta E_K = (m_1/2)v_1^2 + (m_2/2)v_2^2 = ((m_1+m_2)/2)v_2^2 = (7/12)m\, v_2^2$, dove abbiamo tenuto conto che i due corpi hanno lo stesso modulo della velocità (per la fune inestensibile) e abbiamo impiegato la relazione tra le masse. La variazione dell'energia potenziale è dovuta all'aumento di quota del peso, che contribuisce con un termine $m_2gh/3 = mgh/18$ (positivo perché il peso sale), e alla diminuzione di quota della cassa. Essendo la fune inestensibile, la cassa si sposta di un tratto Δh **sul** piano inclinato, e quindi scende di quota per un tratto $\Delta h \sin\theta = \Delta h\, h/L = h/9$, per cui il contributo alla variazione di energia potenziale è $-mgh/9$, con il segno negativo perché la cassa scende. Si ha quindi $\Delta U_G = -mgh/18$ e mettendo tutto assieme si ottiene la stessa risposta già trovata con il procedimento precedente]



2. Un cilindro **pieno e omogeneo** di massa $m = 2.0$ kg e raggio $R = 20$ cm si trova **inizialmente fermo** sulla sommità di un piano inclinato, di altezza $h = 3.0$ m e lunghezza $L = 3h = 9.0$ m. Il piano inclinato nella "prima metà" della sua lunghezza è scabro e presenta **attrito** con coefficiente $\mu = 0.50$. La "seconda metà" della sua lunghezza è invece **liscia**, cioè in questa parte del piano l'attrito è **trascurabile**. All'istante $t_0 = 0$ il cilindro viene lasciato libero di muoversi con velocità iniziale nulla. [Usate $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

   a) Discutete **per bene** (cioè usando argomenti quantitativi) in brutta che tipo di moto compie il cilindro nella sua discesa lungo la "prima metà" del piano inclinato, quella in cui c'è attrito statico, e determinate l'accelerazione a_{CM} del centro di massa in questo tratto.

   Discussione: …………………………………… Cominciamo con il notare che, per semplici ragioni geometriche, l'angolo θ tra piano inclinato e orizzontale è tale che $\sin\theta = h/L = 1/3$, $\cos\theta = (1 - \sin^2\theta)^{1/2} = 8^{1/2}/3$, $tg\theta = 1/8^{1/2}$, in modo da poter impiegare nella risoluzione l'espressione dell'angolo. L'oggetto considerato è un corpo rigido esteso che può, ovviamente, traslare e ruotare. A causa della presenza dell'attrito, il moto **potrebbe** essere di rotolamento puro. Supponiamo allora che il moto sia davvero di rotolamento puro. Le equazioni del moto sarebbero (con ovvio significato dei termini e scrivendo l'equazione del moto di traslazione rispetto a un asse parallelo al piano inclinato e diretto verso il basso): $a_{CM} = g\sin\theta - F_A/m$; $\alpha = F_AR/I$, con $I = (m/2)R^2$ per il cilindro pieno omogeneo. Inoltre la condizione di non strisciamento (rotolamento puro) impone $a_{CM} = \alpha R$. Si ha dunque un sistema di tre equazioni algebriche e tre incognite che, risolto per F_A , fornisce: $F_A = mg\sin\theta/3$. Essendo noti i valori di m e θ, questa equazione fornisce esattamente il valore necessario perché la forza di attrito possa produrre un moto di rotolamento puro. D'altra parte per la forza di attrito statico, ovvero per la definizione di coefficiente di attrito statico, si ha: $F_A \le \mu|N|$, con $|N| = mg\cos\theta$. Occorre allora verificare se il coefficiente di attrito e la configurazione geometrica (l'inclinazione del piano) sono tali da permettere di avere il necessario valore della forza di attrito. In termini matematici, si deve verificare che: $mg\sin\theta/3 \le \mu\, mg\cos\theta$, ovvero: $\mu \ge tg\theta/3$. Questa relazione è numericamente verificata, per cui si può concludere che il moto è di rotolamento puro. Notate che in questa affermazione si tiene anche conto del fatto che il cilindro **parte da fermo**: dunque velocità e spostamento del centro di massa sono sempre legate a velocità e spostamento angolare dalla stessa relazione che esiste per l'accelerazione.

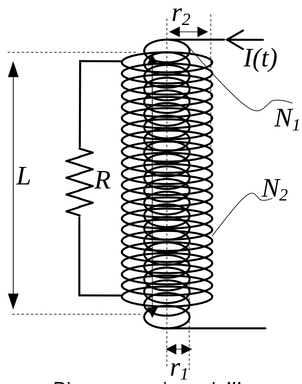
   a_{CM} = …………………………………… = ……… m/s^2 $2g\sin\theta/3 = 2gh/(3L) = 2g/9 = 2.2$ m/s^2 [risolvendo il sistema di equazioni di cui sopra per l'incognita a_{CM} si ottiene la soluzione, da cui si vede che il moto di traslazione è uniformemente accelerato]

   b) Quanto vale la velocità angolare ω' che il cilindro possiede al termine della "prima metà" del piano inclinato, cioè quando giunge al termine della zona in cui c'è attrito statico?

   ω' = …………………………………… ~ ……… rad/s $(2gh/(3R^2))^{1/2} \sim 22$ rad/s [avendo stabilito che il moto è di rotolamento puro, e che quindi non c'è lavoro della forza di attrito (che è statico!), possiamo usare la conservazione dell'energia meccanica, cioè, tenendo conto della natura traslazionale e rotazionale del moto e del fatto che la prima metà del piano inclinato corrisponde a una variazione di quota pari a $h/2$: $0 = (m/2)v_{CM}'^2+(I/2)\omega'^2-mgh/2$. Da qui, notando che nel rotolamento puro si ha $v_{CM} = \omega R$, esce la soluzione, in cui abbiamo anche usato $I = (m/2)R^2$]

c) Discutete **per bene** in brutta che tipo di moto compie il cilindro nella "seconda metà" del piano inclinato, dove non c'è attrito, e stabilite la velocità angolare ω'' che il cilindro possiede quando arriva alla fine del piano inclinato.
Discussione: …………………………………… Nella seconda metà del piano inclinato non c'è forza di attrito, per cui non esiste più alcuna forza che generi un momento rispetto al polo preso sull'asse del cilindro. Di conseguenza l'equazione del moto di rotazione diventa $\alpha = 0$, ovvero la velocità angolare **non varia**. Tuttavia il centro di massa del cilindro continua a essere interessato da un'accelerazione $a_{CM} = g\sin\theta$ che ne fa aumentare la velocità. Dunque nella seconda parte del piano inclinato velocità angolare e del centro di massa non saranno più legate dalla relazione del moto di rotolamento puro (la velocità di traslazione diventa troppo alta affinché non ci sia strisciamento!), cioè il moto sarà di rotolamento **non puro**.
ω'' = …………………………………… ~ ……… rad/s ω'~ 22 rad/s [come già affermato, la velocità angolare rimane la stessa che il cilindro aveva al termine del tratto con attrito]

3. Due solenoidi, composti rispettivamente da N_1 = 1000 e N_2 = 2000 spire di filo ottimo conduttore (di resistività trascurabile), hanno la stessa lunghezza L = 1.0 m e sono coassiali l'uno rispetto all'altro. Come rappresentato in figura, il solenoide 1 è "interno" al solenoide 2; infatti i raggi sono rispettivamente r_1 = 2.0 cm e r_2 = 4.0 cm. Notate che, visti i rapporti tra raggio e lunghezza, per tutti e due i solenoidi si può usare l'approssimazione di solenoide "infinito". Il solenoide 1 è collegato a un generatore di corrente che eroga una corrente variabile nel tempo secondo la legge $I_1(t) = I_0\cos(\omega t)$, con I_0 = 5.0 A e ω = 1.0x10³ rad/s. Il solenoide 2 è invece collegato a un resistore di resistenza R = 50 ohm.



Disegno non in scala!!!

a) Discutete per bene, in brutta, perché si ha una corrente $I_2(t)$ (variabile nel tempo) che scorre nel solenoide 2.
Discussione: …………………………………… La corrente variabile $I_1(t)$ inviata nel solenoide 1, considerato infinito e usando un'approssimazione quasi-statica (cioè disinteressandosi di altri possibili effetti legati alla produzione di onde elettromagnetiche, che sono di fatto scongiurati dalla bassa frequenza angolare di oscillazione della corrente, e che comunque non sareste in grado di trattare!), determina all'interno di questo solenoide un campo magnetico variabile nel tempo $B_1(t)$. All'interno del solenoide 2 si trova allora un flusso di campo magnetico variabile nel tempo: infatti il solenoide 2 abbraccia il solenoide 1, che è quindi interno ad esso, e allora la sua sezione o, per meglio dire, la sezione delle sue spire, sente un flusso di campo magnetico variabile nel tempo $\Phi_2(\mathbf{B_1}(t))$. La variazione temporale di questo flusso induce, secondo la legge di Faraday, una f.e.m. sul solenoide 2, e quindi una corrente $I_2(t)$ che circola nel circuito costituito da solenoide 2 e resistenza R .

b) Scrivete esplicitamente la **funzione** del tempo che descrive l'andamento della corrente $I_2(t)$ che scorre nel solenoide 2. [Dovete scrivere una funzione, per cui non usate valori numerici ma riferitevi alle grandezze rilevanti e note usando i simboli con cui esse sono indicate. Fate attenzione a non cadere in trabocchetti e a considerare correttamente il fatto che il solenoide 2 ha N_2 spire!]
$I_2(t)$ = ………………………….. $\pi r_1^2 \mu_0 (N_1/L) I_0 \omega \sin(\omega t) (N_2/R)$ [il metodo di soluzione è quello delineato nella discussione precedente, che qui rendiamo un po' più quantitativa. Esprimiamo allora il campo magnetico nel solenoide 1 come $B_1(t) = \mu_0 (N_1/L) I_1(t) = \mu_0 (N_1/L) I_0 \cos(\omega t)$ (la relazione impiegata si ottiene, come ben noto, applicando il teorema di Ampere al solenoide infinito). Notando che il campo magnetico è uniforme (e diretto assialmente) all'interno del solenoide 1 e nullo fuori per l'approssimazione di solenoide infinito, il flusso di campo magnetico che insiste sulla sezione del solenoide 2 è $\Phi_2(\mathbf{B_1}(t)) = \pi r_1^2 B_1(t) = \pi r_1^2 \mu_0 (N_1/L) I_0 \cos(\omega t)$. Notate che la sezione considerata è quella del **solenoide 1**: infatti fuori di questo il campo è nullo è non c'è contributo al flusso (e questo è il trabocchetto dal quale guardarsi!). Secondo la legge di Faraday, questo flusso di campo magnetico variabile nel tempo induce una f.e.m. $\Delta V(t) = - d\Phi_2(\mathbf{B_1}(t)) / dt$. Nell'espressione del flusso, l'unica grandezza funzione del tempo è quella espressa dal coseno (tutto il resto è costante e si può "portare fuori dalla derivata"). Ricordando l'espressione della derivata del coseno (e, se non la ricordaste, sappiate che la conoscete benissimo e l'avete anche dimostrata, essendo esattamente la derivata che ci servì per determinare la velocità nel moto armonico!), $d\cos(\omega t)/dt = -\omega \sin(\omega t)$, si ottiene facilmente $\Delta V(t) = \pi r_1^2 \mu_0 (N_1/L) I_0 \omega \sin(\omega t)$. Ora, e questa osservazione è suggerita dal commento nel testo, tale f.e.m. o differenza di potenziale (per noi è in pratica la stessa zuppa) è quella che viene indotta su **una singola spira** del solenoide 2. Infatti questa è la linea (chiusa) che racchiude la superficie in cui abbiamo considerato la variazione di flusso. La differenza di potenziale $\Delta V_2(t)$ ai capi **dell'intero solenoide 2** si ottiene facilmente notando che le sue spire sono ovviamente tutte "collegate in serie" fra loro (è un unico filo che le forma!) e quindi $\Delta V_2(t) = N_2 \Delta V(t)$ (le differenze di potenziale si sommano!). Infine la corrente richiesta dalla domanda si ottiene usando la legge di Ohm, $I_2(t) = \Delta V_2(t)/R$, da cui la risposta. Visto che la considerazione relativa al numero di spire del solenoide 2 è un po' "raffinata" per i vostri standard, nella soluzione si è ritenuta accettabile anche la risposta in cui questo "dettaglio" non era colto e discusso adeguatamente]

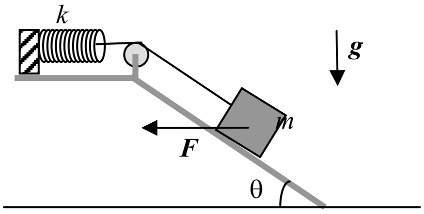
c) Quanto vale la potenza massima (di picco) P_{PEAK} "dissipata" per effetto Joule nella resistenza R ? [Dovreste trovare che la potenza è una funzione periodica del tempo: quello richiesto è il valore massimo assunto dalla funzione che descrive l'andamento della potenza nel tempo, è facilissimo! Usate $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T m/A per la costante di permittività magnetica del vuoto]
P_{PEAK} = ………………………….. = ……….. W $(\pi r_1^2 \mu_0 (N_1/L) I_0 \omega N_2)^2/R$ = 5.0 W [la potenza "dissipata" per effetto Joule nella resistenza R è ovviamente dovuta alla corrente che è indotta nel circuito del solenoide 2. Si ha allora $P(t) = RI_2^2(t) = R(\pi r_1^2 \mu_0 (N_1/L) I_0 \omega \sin(\omega t) (N_2/R))^2$. Questa funzione del tempo è ovviamente periodica (e sempre positiva!) e assume il suo valore massimo quando $\sin(\omega t) = 1$. Da qui la soluzione]

Corso di Laurea Ing. E-A – ESAME DI FISICA GENERALE - 24/7/2015 (“sdoppiato”)

Nome e cognome: ……………………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate “brutte copie” o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un blocco di massa m = 5.0 kg, che si trova sopra un piano inclinato che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all’orizzontale, è attaccato, tramite una corda inestensibile, ad una molla di costante elastica $k = 4.9\text{x}10^2$ N/m il cui altro estremo è vincolato ad una parete fissa. La figura rappresenta schematicamente il sistema considerato (la piccola puleggia sulla sommità del piano inclinato ha massa trascurabile e **non partecipa** alla dinamica del sistema e l’asse della molla si mantiene **sempre** orizzontale). Supponete **trascurabile ogni forma di attrito** e nulle le masse di molla e corda. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per l’accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/6) = ½$ e $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2 \sim 0.87$]



Disegno non in scala!!!

a) Quanto vale l’elongazione della molla $\Delta\ell$ quando il blocco si trova in equilibrio?

$\Delta\ell$ = …………………………………… = ……….. m $(mg/k)sin\theta = mg/(2k) = 5.0\text{x}10^{-2}$ m [la corda “trasmette” la forza elastica sul blocco. Per l’equilibrio la forza elastica, che ha modulo $k\Delta\ell$, deve essere pari alla componente “attiva” della forza peso, $mgsin\theta$, da cui la risposta]

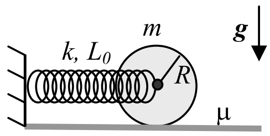
b) A un dato istante, al blocco, che si trovava **fermo** nella posizione di equilibrio, viene applicata una forza esterna $\boldsymbol{F}$ di direzione orizzontale, verso come in figura e modulo F = 50 N. In conseguenza dell’applicazione della forza, il blocco prende a risalire verso la sommità del piano inclinato e l’elongazione della molla si riduce (la corda resta sempre tesa!). Quanto vale la velocità v' del blocco nell’istante in cui l’elongazione della molla è nulla? [Naturalmente la forza agisce continuamente, mantenendosi costante e uniforme, durante tutto il processo di spostamento considerato]

v' = …………………………………… ~ ……….. m/s $((g/k)(Fcos\theta-mg/4))^{1/2} \sim 0.79$ m/s [visto che gli attriti sono trascurabili, si può utilizzare il bilancio energetico: $L_F = \Delta E_K + \Delta U$, dove L_F è il lavoro svolto dalla forza $\boldsymbol{F}$, $\Delta E_K = (m/2)v'^2$, visto che il blocco parte da fermo, e $\Delta U = \Delta U_{ELA} + \Delta U_G$, in modo da tenere in debito conto di tutte le due forze conservative (elastica e peso) che agiscono sul blocco. Per il calcolo, cominciamo con il notare che nel processo considerato il blocco risale lungo il piano inclinato per un tratto $\Delta\ell$ (la corda è inestensibile e si mantiene sempre tesa!), come calcolato sopra, per cui la sua quota aumenta di un tratto $\Delta\ell sin\theta = (mg/k)sin^2\theta = mg/(4k)$, dove abbiamo usato il risultato del punto precedente e il valore del $sin\theta$; di conseguenza è $\Delta U_G = mg\Delta\ell sin\theta = (mg)^2/(4k)$. Inoltre nel processo considerato la molla, che inizialmente aveva un’**energia** elastica $U_{ELA,ini} = (k/2)\Delta\ell^2$, si trova a possedere un’energia elastica nulla (alla fine del processo l’elongazione/compressione è nulla!), per cui $\Delta U_{ELA} = -(k/2)\Delta\ell^2 = -(mg)^2/(8k)$. Di conseguenza $\Delta U = (mg)^2/(8k)$. Resta ora da determinare il lavoro L_F : poiché la forza è costante e uniforme, il lavoro si trova moltiplicandone il modulo per la **proiezione** dello spostamento lungo la direzione della forza stessa, che vale evidentemente $\Delta\ell cos\theta$, per cui $L_F = F\Delta\ell cos\theta = F(mg/(2k))\, cos\theta$. Mettendo tutto assieme si ottiene $(m/2)v'^2 = F(mg/(2k))\, cos\theta - (mg)^2/(8k)$, da cui la soluzione (che evidentemente esiste essendo il secondo membro dell’espressione appena scritta positivo)]

c) Discutete per bene, in brutta, come cambierebbe la risposta al quesito precedente se la superficie del piano inclinato fosse **scabra** e presentasse attrito **dinamico** con un certo coefficiente μ . [Nella discussione non è richiesto che giungiate a determinare la nuova velocità v' , che non potete ottenere non conoscendo il valore di μ]

Discussione: …………………………………… Il metodo da impiegare è invariato rispetto a prima, poiché si può sempre utilizzare il bilancio energetico. Al primo membro dell’espressione di bilancio, però, deve comparire anche il lavoro L_A della forza di attrito. La forza di attrito è costante e uniforme, sempre diretta come il piano inclinato e orientata verso il basso (lo spostamento del blocco è verso l’alto), e vale $F_A = \mu N = \mu(mgcos\theta + Fsin\theta)$: infatti la forza di reazione vincolare, dovendo impedire che il blocco penetri dentro il piano inclinato, deve opporsi sia alla componente normale della forza peso che alla componente normale della forza $\boldsymbol{F}$, che si ottengono proiettando come specificato nell’espressione. Il lavoro dell’attrito è $L_A = -F_A\,\Delta\ell$, dove il segno negativo tiene conto della natura dell’attrito (che si oppone allo spostamento!). Ragionando come per la risposta precedente, si trova $(m/2)v'^2 = F(mg/(2k))\, cos\theta - (mg)^2/(8k) - F_A\,\Delta\ell = F(mg/(2k))\, cos\theta - (mg)^2/(8k) - \mu(mgcos\theta + F/2)\,(mg/(2k))$, dove nell’ultimo passaggio abbiamo sostituito i valori di $\Delta\ell$ e $sin\theta$. In linea di principio, è possibile che il secondo membro della espressione appena scritta diventi nullo o negativo, nel qual caso lo spostamento considerato non potrebbe avere luogo (il primo membro è sempre positivo, o, al minimo, nullo!). In altre parole, il blocco potrebbe fermarsi prima di giungere alla posizione richiesta. Per verificare quantitativamente questa possibilità, vediamo qual è il valore del coefficiente di attrito che annulla il secondo membro dell’espressione, che cioè permette al blocco di arrivare e fermarsi esattamente alla posizione richiesta. Con un minimo di manipolazioni matematiche, si ottiene $\mu = (Fcos\theta - mg/4)/(mgcos\theta + F/2)$. Inserendo i dati numerici del problema si ottiene μ = 0.47. Dunque per valori del coefficiente di attrito maggiori di questo il blocco non arriva neppure alla posizione richiesta. Altrimenti, per coefficienti di attrito inferiori a questo valore, il blocco arriva alla posizione richiesta, e, ovviamente, come si vede dall’equazione, la velocità con cui ci arriva è minore di quella trovata in precedenza

2. Un cilindro pieno e omogeneo di raggio R = 50 cm e massa m = 5.0 kg è libero di ruotare **senza attrito** attorno al suo asse, che è collegato come in figura ad una molla di costante elastica k = 30 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 80 cm, il cui altro estremo è vincolato ad una parete fissa. Il cilindro è poggiato su un piano orizzontale **scabro**, che presenta un certo coefficiente di attrito μ . Inizialmente la molla si trova compressa in modo che la sua lunghezza sia $L_{IN} = L_0/2$ = 40 cm per l’azione di una forza esterna (una manina), che all’istante t_0 = 0 viene rimossa improvvisamente senza fornire velocità iniziale al cilindro, che quindi parte da **fermo**. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell’accelerazione di gravità e assumete trascurabile la massa della molla]



a) Supponendo che le condizioni siano tali da garantire **rotolamento puro**, dimostrate, discutendo per bene in brutta e usando argomenti quantitativi, che il moto del centro di massa del cilindro è armonico, e determinate la pulsazione Ω di questo moto.

Discussione: ………………………… Per verificare che un moto è armonico, occorre scrivere l’equazione del moto, cioè la dipendenza dell’accelerazione dalla posizione, e mostrare che essa è della forma necessaria per ottenere moto armonico. Poiché il cilindro rotola, occorre scrivere due equazioni del moto, per la traslazione del centro di massa e per la rotazione. Usando un asse orizzontale diretto verso la destra di figura e centrato sull’estremo fisso della molla, si ha $a_{CM} = -(k/m)(x-L_0) - F_A/m$, dove si è tenuto conto che la forza di attrito è, ovviamente, diretta verso la sinistra di figura. L’equazione del moto di rotazione recita invece $\alpha = F_AR/I = 2F_A/(mR)$, dove abbiamo tenuto conto che l’unica forza che produce momento rispetto al centro di massa del cilindro, preso come polo, è la forza di attrito e che il suo braccio è pari al raggio del cilindro (inoltre abbiamo esplicitato il momento di inerzia per un cilindro pieno omogeneo). Infine, poiché il rotolamento è dichiaratamente puro, si ha $\alpha = a_{CM}/R$. Risolvendo per F_A si ottiene $F_A = ma_{CM}/2$, da cui $a_{CM} = -(2k/(3m))x + (2k/(3m))L_0$. Questa equazione del moto ha la forma di quella del moto armonico, che in termini generali si può scrivere $a(x) = -K_1x + K_2$, con K_1 costante positiva tale che $\Omega = K_1^{1/2}$.

Ω = …………………………………… = ……….. rad/s $(2k/(3m))^{1/2}$ = 4.0 rad/s [vedi sopra]

b) Nel corso del suo movimento, a un dato istante il cilindro si trova (per la prima volta) in una posizione tale che la molla è alla propria lunghezza di riposo. Quanto valgono velocità del centro di massa del cilindro, v'_{CM} , e modulo della forza di attrito tra cilindro e piano, F'_A , in questo istante?

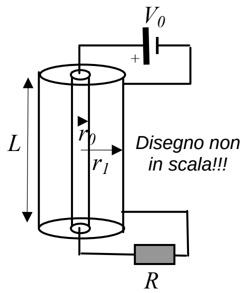
v'_{CM} = …………………………………… = ……….. m/s $(2k/(3m))^{1/2}L_0/2$ = 1.6 m/s [ci sono due modi per rispondere. Il primo si basa sulla legge oraria della velocità che, avendo stabilito che il moto è armonico, recita $v_{CM}(t) = -\Omega A sin(\Omega t+ \Phi)$. A e Φ possono essere facilmente determinati dalle condizioni iniziali, che indicano $A = (L_{IN} - L_0) = -L_0/2$ e $\Phi = 0$. All'istante considerato il centro di massa si trova a passare per la posizione di equilibrio dell'oscillazione (ovviamente il cilindro è in equilibrio quando la molla non è né elongata né compressa, vista l'equazione del moto scritta al punto precedente), dove la velocità assume il suo valore massimo, cioè $sin(\Omega t+ \Phi) = 1$. Da qui la risposta. Ad essa si può anche giungere ragionando in termini di conservazione dell'energia meccanica, che si verifica poiché nel moto di rotolamento puro l'attrito è statico e non compie lavoro. Si può quindi scrivere: $0 = \Delta E_K+\Delta U_{ELA}$. Essendo il cilindro inizialmente fermo e tenendo conto dei contributi rotazionale e traslazionale, la variazione di energia cinetica si scrive: $\Delta E_K = (I/2)\omega^2+(m/2)v'^2_{CM} =(m/2)((R^2v'^2_{CM}/(2R^2))+v'^2_{CM})=3mv'^2_{CM}/4$, dove abbiamo usato il momento di inerzia per un cilindro pieno e omogeneo, $I =mR^2/2$, e il legame tra le velocità dato dalla condizione di puro rotolamento, $\omega = v/R$, con ω velocità angolare del cilindro (occhio: **non** è la pulsazione del moto armonico!!). Inoltre la variazione di energia elastica si scrive semplicemente $\Delta U_{ELA}= -(k/2)(((L_{IN} - L_0)^2=-(k/2) L_0^2/4 = -(k/8) L_0^2$, dato che l'energia elastica "finale" è nulla essendo nulla la compressione o elongazione della molla. Da qui la soluzione, che, ovviamente, è analoga a quella determinata in precedenza]

F'_A = …………………………………… = ……….. N 0 [scrivendo l'equazione del moto nella risposta al punto precedente abbiamo trovato $F_A = ma_{CM}/2$. Questa relazione vale sempre, anche nell'istante considerato in cui, poiché la molla si trova alla propria lunghezza di riposo, $a_{CM} = 0$. Dunque in questo istante la forza di attrito è nulla]

c) Determinate il valore minimo del coefficiente di attrito statico μ_{MIN} tale che per $\mu > \mu_{MIN}$ il cilindro si muove effettivamente di rotolamento puro.

μ_{MIN} = …………………………………… = ……….. $kL_0/(4mg)$ = 0.12 [come si capisce facilmente, la forza di attrito richiesta per il rotolamento puro ha il suo valore massimo (in modulo) negli istanti in cui il cilindro è fermo, cioè agli "estremi" dell'oscillazione. Qui essa vale $|F_A| =| ma_{CM}/2| =| -(k/2)(L_{IN} - L_0)| = kL_0/4$. Occorre quindi che il coefficiente di attrito sia tale che $\mu N = \mu mg \geq kL_0/4$, da cui la soluzione]

3. Un sistema di conduttori, noto come "cavo coassiale", è costituito da un cilindro pieno di materiale ottimo conduttore, di raggio r_0 = 1.0 mm e lunghezza L = 1.0 m, a cui è coassiale un sottile guscio cilindrico di materiale ottimo conduttore, di spessore trascurabile, raggio r_1 = 1.0 cm e lunghezza pari a L . Un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 1.0x10^2 V è collegato ai conduttori come mostrato in figura, la quale indica anche che all'altro "estremo" del sistema i conduttori sono collegati tra loro da un resistore R = 50 ohm. [Usate il valore ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica e $\mu_0 = 4\pi$x10^{-7} T m/A per la permeabilità magnetica del vuoto]



a) Che direzione e verso possiede, e quale espressione ha il campo magnetico $\boldsymbol{B}$ presente nella regione "tra i conduttori", cioè per $r_0 < r < r_1$? Perché all'esterno del sistema ($r > r_1$) il campo magnetico è nullo? [Spiegate per bene, in brutta, ogni passaggio e/o affermazione che vi serve per rispondere; per l'espressione del campo dovete scrivere una **funzione** della distanza r dall'asse del sistema, dunque non usate valori numerici ma servitevi dei simboli che indicano i dati noti del problema; trascurate gli "effetti ai bordi"]

Direzione e verso: ……………………….. Nel sistema di conduttori c'è una corrente di intensità $I = V_0/R$ che scorre: in particolare, visto il collegamento e al polarità del generatore, la corrente scorre verso il basso di figura nel conduttore centrale e verso l'alto in quello esterno (la direzione di scorrimento è sempre assiale nel riferimento cilindrico del sistema). Per la simmetria del sistema, il campo magnetico è ha direzione tangenziale, cioè le linee di campo formano delle circonferenze concentriche all'asse del cavo coassiale. Il verso si deduce con la regola della mano destra (versione "ciao ciao"), tenendo conto del verso della corrente che scorre nel conduttore centrale, l'unica che contribuisce essendo l'unica "concatenata" con una linea di circuitazione circolare di raggio minore di r_1 . Dunque il campo magnetico esce dal foglio a sinistra del conduttore centrale ed entra nel foglio a destra di esso.

B = …………………………………… $\mu_0(V_0/R)/(2\pi r)$ [il modulo del campo magnetico, avendo stabilito per ragioni di simmetria qual è la direzione del campo (tangenziale), può essere facilmente determinato con il cosiddetto teorema di Ampere. Usando come linea (chiusa) di circuitazione una circonferenza concentrica al sistema e di raggio r generico e notando che l'intensità del campo magnetico nella simmetria considerata può dipendere solo dal raggio, e dunque è costante su questa circonferenza, si ha che la circuitazione del campo vale $2\pi rB$. D'altra parte la corrente concatenata a questa circuitazione è tutta e solo la corrente che passa nel conduttore centrale, la cui intensità è $I = V_0/R$. Da qui la soluzione]

Perché $\boldsymbol{B}$ = 0 per $r > r_1$: ……………………….. La simmetria del problema non cambia se si sceglie $r > r_1$. Dunque il campo magnetico, se presente, deve essere tangenziale (e dipendere solo da r) esattamente come nella regione interna, per cui la circuitazione si scrive sempre $2\pi rB$. Però in queste condizioni la corrente concatenata è nulla, essendo data dalla sovrapposizione di due correnti uguali e opposte in verso, per cui il campo deve essere nullo.

b) Quanto vale la carica elettrica Q che si accumula in **condizioni stazionarie** sul conduttore centrale? [Spiegate bene in brutta il procedimento usato! Può farvi comodo ricordare che $ln(10) \sim 2.3$]

Q = ………………………………… ~ ....… C $2\pi\varepsilon_0 LV_0/ln(r_1/r_0) \sim$ 2.4x10^{-9} C [in condizioni stazionarie, il sistema si comporta dal punto di vista elettrostatico come un condensatore cilindrico, le cui armature sono i due conduttori. La differenza di potenziale tra le armature (essendo i materiali ottimi conduttori non c'è caduta di tensione muovendosi lungo la lunghezza del cavo coassiale) è $\Delta V = -V_0$ (il segno negativo dipende dal fatto che il conduttore esterno si trova a potenziale minore di quello interno per come è collegato il generatore). D'altra parte è $\Delta V = -\int_{r0}^{r1}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} =-\int_{r0}^{r1}Edr$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo scelto un sistema di riferimento cilindrico concentrico al cavo coassiale e notato che, per la simmetria del problema, il campo deve essere radiale. Il campo elettrico nella regione di spazio tra i conduttori non è uniforme e il suo modulo dipende dalla distanza r dall'asse del sistema. Per trovare la dipendenza $E(r)$ si deve usare il teorema di Gauss: $Q/\varepsilon_0 = \Phi_S(E)$. Scegliendo per il calcolo del teorema di Gauss un "barattolo" cilindrico di raggio generico r compreso tra i due conduttori, asse parallelo all'asse del cavo coassiale e lunghezza pari a quella del cavo coassiale stesso si ha, tenendo conto del già citato carattere radiale del campo (il flusso passa solo attraverso la superficie laterale del barattolo), $\Phi_S(E) = 2\pi rLE(r)$. Si ottiene quindi: $E(r) = Q/(2\pi\varepsilon_0 Lr)$. A questo punto, tale espressione funzionale del campo elettrico può essere introdotta nell'integrale scritto in precedenza, che dunque diventa: $\Delta V = -V_0 = - (Q/(2\pi\varepsilon_0 L)) \int_{r0}^{r1}(1/r)dr= - (Q/(2\pi\varepsilon_0 L))ln(r_1/r_0)$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo risolto l'integrale. Da qui, esplicitando Q, si ottiene la soluzione]

c) Supponete che all'istante t_0 = 0 il generatore venga scollegato dalle armature. Quanto vale **l'energia "**dissipata" per effetto Joule, E_J , dal resistore dopo che il generatore è stato scollegato? [State attenti; vi si chiede **un'energia, non una potenza!** Si intende, ovviamente, che diate tutto il tempo necessario affinché la dissipazione abbia luogo completamente]

E_J = …………………………………… ~ …… J $\pi\varepsilon_0 LV_0^2/ln(r_1/r_0) \sim$ 1.2x10^{-7} J [è facile rendersi conto che, una volta scollegato il generatore, siamo in presenza del processo di scarica (completa) di un condensatore (il condensatore "cilindrico" formato dal sistema dei due conduttori) attraverso la resistenza R . In questo processo, se si aspetta un tempo sufficientemente lungo (idealmente "infinito") , tutta l'energia U_E inizialmente posseduta dal generatore si "dissipa" per effetto Joule, Per determinare tale energia, che fornisce la risposta, occorre ricordare che $U_E = Q^2/(2C)$, con C capacità del condensatore. Questa può essere facilmente determinata riprendendo la risposta data al quesito precedente. Infatti per definizione $C = Q/V_0 = 2\pi\varepsilon_0 L/ln(r_2/r_1)$. Da qui si ottiene la risposta]