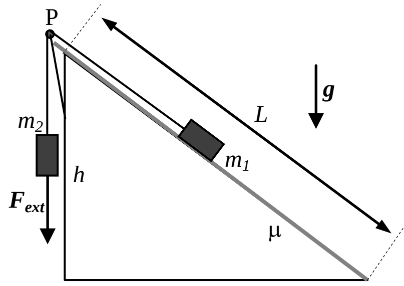
Corso di Laurea Ing. E-A – ESAME DI FISICA GENERALE – 11/1/2016

Nome e cognome: ………………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*



1. Una cassa di massa $m_1 = 3m = 3.0$ kg si trova su un piano inclinato, di altezza $h = 4.0$ m e lunghezza $L = 5h/4 = 5.0$ m. Il piano inclinato è **scabro** e presenta un coefficiente di attrito $\mu = 5/6$ (sia statico che dinamico). Alla cassa è attaccato l'estremo di una fune inestensibile e di massa trascurabile al cui altro estremo si trova un *peso* di massa $m_2 = m = 1.0$ kg, libero di muoversi in direzione verticale. La fune, dopo un tratto in cui si trova parallela al piano inclinato, può scorrere con **attrito trascurabile** attorno a un perno (indicato con P in figura) montato sulla sommità del piano inclinato stesso. In queste condizioni si osserva che il sistema (*peso* e cassa) è in **equilibrio**. [Usate $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

   a) Quanto vale, in queste condizioni di equilibrio, il modulo della forza di attrito $F_{A,eq}$? Discutete (in brutta) se la condizione di equilibrio descritta può essere effettivamente realizzata.

   $F_{A,eq}$ = …………………………………… = ……… N $7mg/5 = 14$ N   [cominciamo con il notare che, per semplici ragioni geometriche, l'angolo θ tra piano inclinato e orizzontale è tale che $sin\theta = h/L = 4/5$, $cos\theta = (1 - sin^2\theta)^{1/2} = 3/5$, $tg\theta = 4/3$, in modo da poter impiegare nella risoluzione l'espressione dell'angolo. All'equilibrio la tensione della fune deve valere $m_2g = mg$, applicata sulla cassa in direzione parallela al piano e orientata verso la sommità. Inoltre sulla cassa agisce la componente della forza peso parallela al piano, orientata verso il basso e di modulo $m_1gsin\theta = m_1gh/L = 12mg/5$. Se non ci fosse l'attrito, che è ovviamente statico nelle condizioni della domanda, la cassa si muoverebbe verso il basso del piano inclinato. Dunque la forza di attrito deve essere diretta verso l'alto e avere modulo $F_{A,eq} = 12mg/5 - mg$, da cui la risposta]

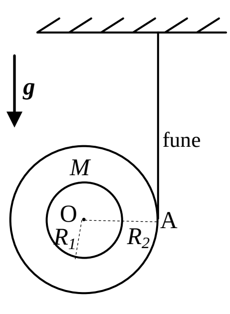
   Discussione: ……………………………………   La forza di attrito statico ha un modulo $F_A \leq \mu N$, con N modulo della reazione vincolare esercitata al contatto fra cassa e piano inclinato scabro, che è ortogonale al piano inclinato. L'unica forza che ha componente ortogonale al piano inclinato è la forza peso, per cui $N = m_1gcos\theta = 9mg/5$. La disequazione diventa dunque $\mu \geq F_{A,eq} / N = 7/9 =$ 0.78, che è effettivamente minore di $5/6$ = 0.83, per cui l'equilibrio si può effettivamente instaurare nelle condizioni descritte.

   b) Supponete che a un dato istante sul *peso* (la massa m_2) venga applicata una forza esterna **costante e uniforme**, di modulo $F_{ext} = 40$ N , direzione verticale orientata verso il basso (come in figura). L'applicazione di questa forza annulla l'equilibrio, e *peso* e massa prendono a muoversi. Quanto vale l'accelerazione a_2 con cui si muove il *peso*? [Ricordate che il piano inclinato è scabro!]

   a_2 = …………………………………… = ……… m/s^2 $F_{ext}/(4m) - (29/40)g =$ 2.9 m/s^2 [occorre scrivere le equazioni del moto dei **due** corpi che si muovono. Visto che, presumibilmente, nel moto il peso scenderà verso il basso (questo è il verso della forza applicata che determina l'uscita dalle condizioni di equilibrio!) e la cassa salirà verso l'alto, usiamo un riferimento verticale orientato verso il basso per il peso e uno parallelo al piano e orientato verso l'alto per la cassa. Si ha facilmente: $a_1 = - gsin\theta + T/m_1 - F_A/m_1 = -4g/5 + T/(3m) - F_A/(3m)$, dove abbiamo espresso il seno dell'angolo con ipotenusa e cateto e indicato con F_A il modulo della forza di attrito in queste condizioni, che ovviamente dovrà essere orientata in modo da opporsi allo spostamento, e $a_2 = -T/m_2 + g + F_{ext}/m_2 = -T/m + g + F_{ext}/m$. Poiché la fune è inestensibile, lo spostamento di uno dei due corpi è uguale, in modulo, a quello dell'altro, per cui $a_1 = a_2$. Inoltre nelle condizioni studiate si ha attrito dinamico, per cui $F_A = \mu N = \mu 3mgcos\theta = (5/6)3mg(3/5) = 3mg/2$. Risolvendo il sistema delle due equazioni del moto per l'incognita T si ottiene $T = 3F_{ext}/4 + (69/40)mg$. Inserendo questa espressione nell'equazione per a_2 e facendo un po' di lavoro di matematica si ottiene la soluzione]

   c) Quanto vale la velocità v_2 che il *peso* possiede quando si è spostato verso il basso di un tratto $\Delta h = h/2 = 2.0$ m? [Supponete che il sistema parta da fermo, cioè che *peso* e cassa non abbiano velocità iniziale e ricordate sempre che il piano inclinato è scabro]

   v_2 = …………………………………… ~ ……… m/s $(2a_2\Delta h)^{1/2} = (a_2h)^{1/2} \sim$ 3.4 m/s   [avendo stabilito che il moto del peso è uniformemente accelerato con accelerazione a_2 determinata al punto precedente, il modo più immediato per rispondere consiste nell'usare le leggi del moto uniformemente accelerato che, tenendo conto delle condizioni iniziali, si scrivono $\Delta h = (a_2/2)t^2$ e $v_2 = a_2t = (2a_2\Delta h)^{1/2}$, da cui la soluzione. Un modo altrettanto valido, ma decisamente più laborioso come conti, consiste nell'applicare il principio di bilancio energetico: $L_A + L_{FEXT} = \Delta E_K + \Delta U_G$, dove al primo membro compare la somma (algebrica) dei lavori di attrito e forza esterna applicata al peso. In questa espressione è $\Delta E_K = (m_1/2)v_1^2 + (m_2/2)v_2^2 = (4m/2)v_2^2$, dove abbiamo tenuto conto che i due corpi hanno lo stesso modulo della velocità (per la fune inestensibile) e abbiamo impiegato la relazione tra le masse. La variazione dell'energia potenziale è dovuta alla diminuzione di quota del peso, che contribuisce con un termine $-m_2gh/2 = - mgh/2$ (negativo perché il peso scende), e all'aumento di quota della cassa. Essendo la fune inestensibile, la cassa si sposta di un tratto Δh **sul** piano inclinato, e quindi sale di quota per un tratto $\Delta h\ sin\theta = \Delta h\ h/L = 4h/10 = 2h/5$, per cui il contributo alla variazione di energia potenziale è $6mgh/5$, con il segno positivo perché la cassa sale. Si ha quindi $\Delta U_G = 7mgh/10$. Il lavoro della forza di attrito dinamico L_A può essere facilmente espresso notando che, come già osservato prima, la forza di attrito è costante e vale, in modulo, $F_A = 3mg/2$. Lo spostamento necessario per calcolare il lavoro è pari a $\Delta h = h/2$ (la cassa striscia per questo tratto sul piano inclinato scabro), per cui, tenendo conto che forza e spostamento hanno versi opposti tra loro, da cui il segno negativo del lavoro, si ha $L_A = -3mgh/4$. Infine il lavoro della forza esterna, che è anche costante e uniforme, si esprime come $L_{Fext} = F_{ext}\Delta h = F_{ext}h/2$. Mettendo tutto assieme si trova: $F_{ext}h/2 - 3mgh/4 = (4m/2)v_2^2 + 7mgh/10$, ovvero $2mv_2^2 = F_{ext}h/2 - mgh(3/4+7/10)$,ovvero ancora $v_2^2 = F_{ext}h/(4m) - gh(58/80) = F_{ext}h/(4m) - gh(29/40)$, che conduce allo stesso risultato trovato in precedenza]



2. Un cilindro **cavo** omogeneo ha massa $M = 1.3$ kg , raggio interno $R_1 = R = 10$ cm , raggio esterno $R_2 = 2R = 20$ cm. Una fune inestensibile di massa trascurabile, il cui estremo libero è fissato a un solaio fisso e rigido, si trova avvolta attorno alla superficie laterale del cilindro, come schematizzato in figura. Il cilindro è così libero di scendere verso il basso mentre la fune si srotola, muovendosi di moto roto-traslatorio e comportandosi, in pratica, come uno "yo-yo". [Usate $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità. Immaginate che la tensione agisca sempre sul punto A di figura e che la fune, ovviamente, non slitti sulla superficie laterale del cilindro su cui è avvolta; inoltre trascurate ogni ulteriore forma di attrito]

   a) Quanto vale il modulo della tensione T che la fune esercita sul cilindro durante il moto roto-traslatorio?

   T = ……………………….. = ……….. N $5Mg/13 = 4.9$ N   [come primo passo, e in preparazione del resto della soluzione, determiniamo il momento di inerzia del cilindro cavo rispetto a un polo che coincide con il suo asse geometrico (O in figura). Si può facilmente dimostrare che il momento di inerzia vale $I = M(R_1^2 + R_2^2)/2$. La dimostrazione si riporta qui nel seguito. Per definizione, è $I = \int r^2\ dm$, dove l'integrale è esteso sull'intera massa ("integrale di massa") del corpo e r rappresenta la distanza dell'elemento di massa dm dal polo considerato. L'elemento di massa può essere convenientemente espresso in funzione dell'elemento infinitesimo di volume dV , attraverso la relazione $dm = \rho_m dV$. In questa relazione ρ_m rappresenta la densità di massa che, essendo il cilindro omogeneo, è uniforme e data da $\rho_m = M/V$, dove il volume del cilindro (**cavo**) è $V = \pi\ (R_2^2 - R_1^2)\ h$, con h "altezza" del cilindro (incognita, ma, come vedremo, si semplifica e quindi non serve conoscerne il valore). L'elemento di volume, a causa della simmetria cilindrica, può essere convenientemente individuato come volume infinitesimo di un guscio cilindrico di raggio r generico e spessore infinitesimo dr , cioè $dV = 2\pi rhdr$. Si ha quindi $dm = (2M/(R_2^2 - R_1^2))rdr$ e, mettendo in evidenza tutti i termini che non variano nell'integrazione, l'integrale diventa $I = (2M/(R_2^2 - R_1^2)) \int_{R1}^{R2} r^3 dr$, dove gli estremi di integrazione coincidono con raggio interno ed esterno del cilindro cavo. Svolgendo l'integrale si ottiene $I = (2M/(R_2^2 - R_1^2))(R_2^4 - R_1^4)/4 = (M/(2(R_2^2 - R_1^2)))(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)$, dove abbiamo usato un noto sviluppo per la differenza di potenze pari. Questa espressione dimostra l'ipotesi fatta prima; usando la relazione tra i raggi, si trova in particolare $I = 5MR^2/2$. A questo punto possiamo occuparci di studiare la dinamica del cilindro. Esso ruota attorno al proprio asse e il suo centro di massa trasla verticalmente verso il basso. Considerando come polo di rotazione il punto O (centro di massa del cilindro) e usando un asse verticale orientato verso il basso, le equazioni del moto recitano: $a_{CM} = g - T/M$ e $\alpha = TR_2/I = 2TR/I$, dove abbiamo notato che l'unica forza che fa momento rispetto al polo considerato è la tensione della fune e che il braccio corrispondente vale $R_2 = 2R$. Sostituendo l'espressione del momento di inerzia trovata sopra si ha $\alpha = 4T/(5MR)$. Dato che la fune non slitta sulla superficie laterale del cilindro, si ha anche $a_{CM} = \alpha R_2 = 2\alpha R$ (fate attenzione al fatto che la fune è avvolta sulla superficie esterna del cilindro, quella di raggio R_2). Con questa equazione si ottiene un sistema di tre equazioni e tre incognite che, risolto per l'incognita T, fornisce la soluzione. Notate che la tensione della fune è costante e minore in modulo della forza peso Mg. Osservate poi che allo stesso risultato si poteva arrivare considerando il moto del cilindro come di sola rotazione rispetto al polo, istantaneamente fisso, A. In questo caso l'unica equazione del moto sarebbe stata $\alpha = 2MgR/I'$, con $I' = I + M(2R)^2 = 13MR^2/2$ per il teorema degli assi paralleli (la rotazione avviene, con questa scelta del polo, attorno a un asse parallelo a quello passante per il centro di massa e distante da questo per un tratto $R_2 = 2R$). Dall'equazione esce un'accelerazione angolare $\alpha = 4g/(13R)$, da cui $a_{CM} = 2\alpha R = 8g/13 = g - T/M$, e quindi .$T = 5Mg/13$]

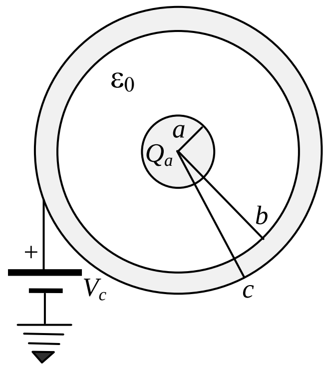
b) Supponendo che il cilindro parta da fermo da una certa quota, quanto vale la velocità v_{CM} del suo centro di massa quando questo è sceso per un tratto Δh = 65 cm?

v_{CM} = ……………………….. = …….. m/s $4(g\Delta h/13)^{1/2}$ = 2.8 m/s [non essendoci forze dissipative che fanno lavoro si conserva l'energia meccanica: $0 = \Delta E_K + \Delta U$. La variazione di energia potenziale è dovuta alla forza peso e si esprime $\Delta U = -Mg\Delta h$ (il segno negativo indica che essa diminuisce, poiché il centro di massa si abbassa). La variazione di energia cinetica può essere espressa con un termine dovuto alla traslazione, $Mv_{CM}^2/2$, sommato a uno dovuto alla rotazione, $I\omega^2/2$. Poiché la fune non slitta sulla superficie del cilindro si ha $\omega = v_{CM}/R_2 = v_{CM}/(2R)$. Pertanto, usando l'espressione di I determinata sopra, la variazione di energia cinetica diventa $\Delta E_K = (M/2)v_{CM}^2 + (5MR^2/4)v_{CM}^2/(4R^2) = M v_{CM}^2(1/2+5/16) = (13/16) M v_{CM}^2$. Mettendo tutto assieme si ottiene la soluzione]

c) Immaginate ora che, subito dopo che il centro di massa è sceso per il tratto Δh, la fune si stacchi improvvisamente dal solaio e che quindi essa non giochi più alcun ruolo nella dinamica dello "yo-yo". Quanto vale la velocità angolare ω'del cilindro dopo che il suo centro di massa è sceso per un ulteriore tratto Δh = 65 cm?

ω' = ……………………….. = …….. rad/s $v_{CM}/(2R)$ = 14 rad/s [dopo la "scomparsa" della fune non ci sono più forze in grado di produrre momento rispetto al centro del cilindro. Dunque non c'è più accelerazione angolare e pertanto la velocità angolare non cambia, rimanendo pari al valore che aveva subito prima del distacco. Questo valore corrisponde alla velocità del centro di massa della risposta precedente, attraverso la relazione geometrica, già menzionata, $\omega = v_{CM}/(2R)$, con v_{CM} calcolato sopra]

3. Una quantità di carica Q_a = 4.4x10^{-11} C è stata messa su una sfera piena di raggio a = 10 cm, fatta di materiale **conduttore** omogeneo, per cui la sfera stessa **non** è neutra. La sfera è circondata da un guscio sferico spesso, con raggio interno b = 40 cm e raggio esterno c = 50 cm, concentrico alla sfera e fatto anch'esso di materiale **conduttore** omogeneo; lo spazio tra sfera e guscio, cioè il volume compreso tra $r = a$ e $r = b$, è vuoto. Come rappresentato in figura, il guscio è collegato al polo positivo di un generatore di differenza di potenziale V_c = 5.0 V, il cui altro polo è collegato a terra; nella soluzione considerate il sistema in condizioni di **equilibrio**. [Usate ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto]



a) Quanto vale il **potenziale** $V_{r=0}$ che si misura al centro della sfera, cioè nel punto r = 0? [Osservate che si chiede un potenziale e non una differenza di potenziale: fate il debito uso delle "condizioni al contorno" del problema, ricordando che, per convenzione, il potenziale di un punto collocato a grandissima distanza dal sistema considerato è nullo, come quello della terra]

$V_{r=0}$ = …………………………….= …….. V $V_c - (Q_a/(4\pi\varepsilon_0))(1/b-1/a)$ = 8.0 V [nella regione $a < r < b$ il campo elettrico $E(r)$ può essere facilmente determinato usando il teorema di Gauss. Esso stabilisce che, nelle condizioni di simmetria sferica in uso, il campo sia lo stesso che si avrebbe se la carica Q_a fosse puntiforme e collocata nel punto r = 0. Dunque si ha $E(r) = Q_a/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$. Inoltre la simmetria sferica garantisce che questo campo sia radiale e orientato verso l'"esterno" a causa del segno di Q_a . Conoscendo le caratteristiche e l'espressione funzionale del campo elettrico, possiamo determinare la differenza di potenziale $\Delta V_{ab} = V_{r=b} - V_{r=a}$ tra i punti $r = b$ e $r = a$: $\Delta V_{ab} = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_a^b E(r)dr = -\int_a^b (Q_a/(4\pi\varepsilon_0 r^2))dr = (Q_a/(4\pi\varepsilon_0))(1/b-1/a)$. Nelle condizioni di equilibrio considerate nel problema, i conduttori sono equipotenziali. Pertanto $V_{r=0} = V_{r=a}$ e $V_{r=c} = V_{r=b}$. D'altronde, per la presenza del generatore, deve anche essere $V_{r=c} = V_c$. Mettendo tutto assieme si ottiene la soluzione]

b) Quanto vale la quantità di carica Q_b che, in condizioni di equilibrio, si trova sulla superficie sferica di raggio $r = b$?

Q_b = ……………………………. = ………… C $-Q_a$ = - 4.4x10^{-11} C [la risposta è immediata ricordando che, all'equilibrio, il campo in un conduttore è nullo. Se si applica il teorema di Gauss a una scatola sferica di raggio r compreso tra $r = b$ e $r = c$, cioè dentro il guscio sferico conduttore, dove il campo è nullo, si ottiene che la carica compresa in questa scatola deve essere nulla. La carica racchiusa nella carica è data dalla somma algebrica Q_a+Q_b , da cui la risposta]

c) Quanto vale la quantità di carica Q_c che, in condizioni di equilibrio, si trova sulla superficie sferica di raggio $r = c$?

Q_c = ……………………………. = ………… C $-V_c 4\pi\varepsilon_0 c$ = - 2.8x10^{-10} C [il guscio sferico è collegato al generatore, che dunque può comportarsi da "pompa" nei confronti delle cariche elettriche che si trovano sulla terra, potendole spostare dalla terra al guscio sferico che, quindi, potrà risultare non neutro. Infatti esso si trova a differenza di potenziale $\Delta V_{c\infty} = V_{r=\infty} - V_{r=c} = -V_c$ rispetto a un punto che si trova a grandissima distanza, virtualmente "infinita", dal sistema considerato. D'altra parte, ragionando come sopra, deve essere $\Delta V_{c\infty} = -\int_c^\infty E(r)dr$, dove stavolta il campo elettrico $E(r)$ è quello prodotto dalla somma algebrica delle cariche contenute all'interno della scatola di raggio $r > c$. Dato che le cariche sulla superficie interna del guscio e sulla sfera sono uguali e opposte, questa somma algebrica è pari alla sola carica Q_c , per cui $E(r) = Q_c/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$. Svolgendo l'integrale, facendo il passaggio al limite $r \rightarrow \infty$ e mettendo tutto assieme si ottiene la risposta]