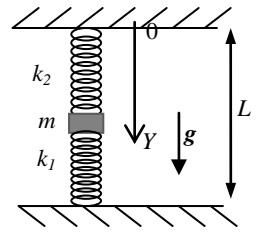


Nome e cognome:

Matricola:

Istruzioni: riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegare "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione

1. Una massa **puntiforme** $m = 0.30$ kg è vincolata agli estremi di due molle di massa trascurabile. Gli altri estremi delle due molle sono vincolati rispettivamente a un solaio e a un pavimento rigidi e indeformabili, come rappresentato schematicamente in figura. La distanza tra pavimento e solaio è $L = 0.90$ m. Le due molle hanno entrambi **lunghezza di riposo trascurabile** mentre le loro costanti elastiche sono diverse, valendo $k_1 = k = 10$ N/m e $k_2 = 2k = 20$ N/m rispettivamente per la molla "inferiore" e per quella "superiore" (vedi figura). L'eventuale movimento della massa, che avviene con **attrito trascurabile**, è **solo in direzione verticale**. [Indicate tale direzione come Y e usate un asse centrato sul solaio e orientato verso il basso, come in figura. Usate $g = 9.8$ m/s² per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Usando l'asse di riferimento Y indicato in figura, quanto vale la posizione di **equilibrio** y_{EQ} ? [Ricordate che la massa è **puntiforme**, anche se, per esigenze tipografiche, essa appare in figura come un oggetto dotato di dimensioni non nulle; la posizione di equilibrio richiesta è la coordinata della massa in quel sistema di riferimento]

$y_{EQ} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ m $mg/(3k)+L/3 = 0.40$ m [all'equilibrio la sommatoria delle forze agenti sulla massa deve essere nulla. Tutte e due le molle sono evidentemente estese rispetto alla propria lunghezza di riposo, per cui la molla 1 tirerà verso il basso e la molla 2 verso l'alto. Quindi, usando il riferimento indicato: $0 = mg + k_1L_1 - k_2L_2$, dove L_1 e L_2 sono le lunghezze delle due molle. Si ha subito $L_2 = y$, mentre $L_1 = L - y$, come suggerito dalla geometria. Si ottiene quindi $0 = mg - (k_1+k_2)y + k_1L = mg - 3ky + kL$, da cui la soluzione]

b) Supponete ora che la massa venga spostata, a causa di una forza esterna, nella posizione $y_0 = L/3 = 0.30$ m (fate sempre riferimento all'asse Y di figura) e quindi venga istantaneamente lasciata libera di muoversi con velocità iniziale nulla. Verificate in modo chiaro, in brutta, che il moto della massa è armonico e determinate la pulsazione ω della sua oscillazione.

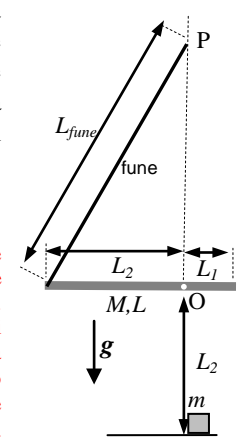
Verifica del moto armonico : $\dots\dots\dots$ Il moto unidimensionale di un corpo puntiforme è armonico se la sua equazione del moto, supponendo che lo spostamento avvenga in direzione Y (e che y sia la coordinata del corpo stesso) si scrive: $a(y) = -K_1y + K_2$, con K_1 costante positiva e K_2 costante di segno qualsiasi (eventualmente anche nulla). L'equazione del moto della massa si ricava facilmente sulla base di quanto scritto nella soluzione al quesito precedente. Dividendo le forze per la massa, si ha infatti: $a(y) = -(3k/m)+g+(k/m)L$, che è proprio quella di un moto armonico.

$\omega = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ rad/s $(3k/m)^{1/2} = 10$ rad/s [nel moto armonico di cui ci stiamo occupando deve essere $\omega = \sqrt{K_1}$, da cui la risposta]

c) Nel moto oscillatorio della massa, essa si trova a passare, a un certo istante e una prima volta, per la posizione $y' = y_{EQ}$ (posizione di equilibrio determinata prima). Quanto vale la velocità v' con cui essa passa per questa posizione?

$v' = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ m/s $(mg/(3k))\omega = g/\omega = 0.98$ m/s [ci sono almeno due strade possibili per rispondere, basate sull'analisi del moto e sulla conservazione dell'energia meccanica. La strada più semplice è sicuramente quella che si basa sull'analisi del moto. Abbiamo stabilito che esso è armonico, per cui la legge oraria del moto si scrive $y(t) = A\cos(\omega t + \Phi) + y_{EQ}$, mentre la legge oraria della velocità è $v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \Phi)$. I parametri A e Φ dipendono dalle condizioni iniziali, che sono $y(t=0) = y_0$ e $v(t=0) = 0$, dove abbiamo posto $t=0$ come istante iniziale del moto. Dalla seconda condizione iniziale si ottiene $\Phi = 0$ che, sostituita nella prima, porta a $A = (y_0 - y_{EQ})$. L'istante di passaggio per la posizione di equilibrio, che è quella attorno a cui avviene l'oscillazione, corrisponde a $\omega t' = \pi/2$. Infatti in questo istante la velocità assume il suo valore massimo (in valore assoluto!). Quindi $v' = -\omega A = -\omega (y_0 - y_{EQ})$, da cui la soluzione, dove il segno positivo è in accordo con il fatto che la posizione iniziale si trova più in alto di quella finale (di equilibrio), per cui la massa si muove verso il basso, cioè nel senso positivo dell'asse considerato. Una strada più ovvia, ma anche più complicata dal punto di vista matematico, è quella che passa per la conservazione dell'energia meccanica, come reso possibile dagli attriti trascurabili. Deve quindi essere: $0 = \Delta U_G + \Delta U_{ELA} + \Delta E_K$. La variazione di energia potenziale gravitazionale si scrive $\Delta U_G = -mg(y_{EQ} - y_0) = -(mg)^2/(3k)$, dove abbiamo usato l'espressione di y_{EQ} trovata sopra e dove il segno negativo tiene conto dell'orientazione dell'asse (l'energia potenziale deve aumentare al diminuire di y !). Per la variazione dell'energia elastica, occorre ovviamente considerare tutte e due le molle (le loro energie vanno sommate tra loro) e notare che per la molla 1 la lunghezza iniziale è $(L - y_0)$ e quella finale è $(L - y_{EQ})$, mentre per la molla 2 la lunghezza iniziale è y_0 e quella finale è y_{EQ} . Si ha quindi $\Delta U_{ELA1} = (k_1/2)((L - y_{EQ})^2 - (L - y_0)^2)$ e $\Delta U_{ELA2} = (k_2/2)(y_{EQ}^2 - y_0^2)$. Ricordando la relazione tra le costanti elastiche delle due molle e sviluppando i binomi quadrati, si ha facilmente $\Delta U_{ELA} = (k/2)(3y_{EQ}^2 - 3y_0^2 + 2y_0L - 2y_{EQ}L)$. Sostituendo l'espressione di y_{EQ} trovata sopra e quella di y_0 data nel testo, e sviluppando i binomi quadri, si ha $\Delta U_{ELA} = (k/2)(3(mg/(3k))^2 + 3L^2/9 + 2mgL/(3k) - 3L^2/9 + 2L^2/3 - 2(mg/(3k))L - 2L^2/3) = (k/2)((mg)^2/(3k^2)) = (mg)^2/(6k)$. Allora la conservazione dell'energia meccanica porta a, complessivamente: $0 = (m/2)v'^2 + ((mg)^2/(3k))(-1+1/2) = (m/2)v'^2 - (m/2)(mg^2/(3k))$, che dà, ovviamente, la stessa soluzione trovata prima]

2. Un'asta sottile omogenea, di lunghezza $L = 1.2$ m e massa $M = 0.27$ kg, è impernata nel punto O che dista $L_1 = L/4$ da un estremo in modo da poter ruotare **con attrito trascurabile** su un piano verticale. Inizialmente l'asta è mantenuta in direzione orizzontale, come rappresentato in figura, da una fune inestensibile. La fune è vincolata da una parte a un estremo dell'asta e dall'altra al punto P, che si trova sulla verticale di O; si sa che la lunghezza della fune è $L_{fune} = 2L_2$. In queste condizioni l'asta è in equilibrio. [Usate il valore $g = 9.8$ m/s² per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Quanto vale la tensione T della fune?
 $T = \dots\dots\dots \sim \dots\dots\dots$ N $2Mg/(3\sqrt{3}) \sim 1.0$ N [per

l'equilibrio rotazionale, deve essere nulla la somma dei momenti assiali delle forze rispetto a un polo, che scegliamo in O. Le forze che fanno momento rispetto a questo polo sono il peso dell'asta Mg , applicato al centro di massa dell'asta stessa e tale da far ruotare in verso antiorario l'asta, e la tensione della fune, applicata all'estremo dell'asta e tale da provocare una rotazione in verso orario. Poiché i due momenti agiscono in verso opposto, è sufficiente uguagliarne i moduli. Il centro di massa dell'asta si trova nel punto di mezzo della sua lunghezza, per cui, tenendo conto che la forza peso è verticale, il braccio è $L/4$, e, in modulo, il momento della forza è $MgL/4$. Il braccio della tensione della fune si trova come distanza tra O e la direzione della fune. Chiamando θ l'angolo compreso tra direzione dell'asta e direzione della fune, si ha che il braccio vale $L_2\sin\theta = 3L\sin\theta/4$, per cui in modulo il momento della forza vale $3TL\sin\theta/4$. D'altra parte per motivi geometrici è facile osservare che $\sin\theta = (L_{fune}^2 - L_2^2)^{1/2} / L_{fune} = 3^{1/2}/2$ (l'angolo è di $\pi/3$). Uguagliando i moduli dei due momenti si trova la risposta]

b) A un dato istante la fune viene improvvisamente tagliata: l'asta comincia allora a ruotare in verso antiorario (rispetto alla figura) partendo da ferma. Quando si trova in direzione verticale, essa **urta** in modo **completamente elastico** un oggetto **puntiforme** di massa $m = M/3 = 90$ g, che si trovava inizialmente fermo a distanza L_2 "sotto" il punto O; tale oggetto è libero di scivolare senza attrito lungo la direzione orizzontale. Quanto vale la velocità angolare ω_0 che l'asta possiede quando si trova in direzione verticale, cioè **subito prima** dell'urto con l'oggetto puntiforme?

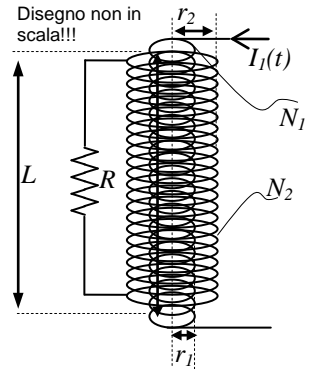
$$\omega_0 = \dots \sim \dots \text{ rad/s} \quad (MgL/(2I))^{1/2} = (24g/(7L))^{1/2} \sim 5.3 \text{ rad/s}$$

[poiché gli attriti si ritengono trascurabili, si conserva l'energia meccanica, per cui $\Delta E_K = (1/2)\omega_0^2 = -\Delta U_G = Mg(L-L_1) = MgL/4$, dove si è tenuto conto del fatto che l'energia potenziale gravitazionale varia a causa della variazione di quota del centro di massa dell'asta, il quale scende verso il basso per un tratto $|L-L_1|=L/4$. Il momento di inerzia dell'asta per una rotazione attorno al polo O può essere calcolato usando il teorema degli assi paralleli, ottenendo $I = 7ML^2/48$, da cui la soluzione]

- c) Quanto vale la velocità angolare ω dell'asta subito dopo l'urto con l'oggetto puntiforme? [Suggerimento: considerate attentamente tutte le conservazioni di grandezze rilevanti e specificatele in brutta. **Nota bene:** la soluzione numerica completa può rivelarsi difficoltosa: se non ci riuscite, lasciate chiaramente indicate le equazioni che vanno risolte usando le espressioni letterali dei dati noti del problema, senza ostinarvi nella soluzione!]

$\omega = \dots \sim \dots \text{ rad/s} \quad -(11/25)\omega_0 = -(11/25)(24g/(7L))^{1/2} \sim -2.3 \text{ rad/s}$ [nell'urto si conservano l'energia cinetica totale del sistema (l'urto è dichiarato elastico) e il momento angolare totale. Infatti la quantità di moto non si conserva a causa di forze impulsive che agiscono sul perno, le quali, avendo braccio nullo, non modificano il momento angolare. Si possono dunque scrivere due equazioni: $(I/2)\omega_0^2 = (I/2)\omega^2 + (m/2)v^2$; $I\omega_0 = I\omega + mvL_2$, dove v indica la velocità dell'oggetto puntiforme subito dopo l'urto. Usando la relazione tra le masse data nel testo e l'espressione di I trovata in precedenza, le due equazioni diventano rispettivamente: $(7/16)L^2\omega_0^2 = (7/16)L^2\omega^2 + v^2$ e $(7/12)L\omega_0 = (7/12)L\omega + v$. Dalla seconda si ricava $v = (7L/12)(\omega_0 - \omega)$. Facendo il quadrato e sostituendo nella prima si ottiene, con qualche rimaneggiamento: $\omega_0^2 - \omega^2 = (16/7)(49/144)(\omega_0 - \omega)^2 = (7/18)(\omega_0 - \omega)^2$. Questa è un'equazione di secondo grado che, risolta, fornisce il valore di ω . Per la soluzione, può essere utile ricordare e sfruttare la seguente relazione: $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)$. Usandola, si ottiene $(\omega_0 + \omega) = (7/18)(\omega_0 - \omega)$, un'equazione di primo grado che, risolta, dà la soluzione. Notate che il segno negativo significa che l'asta, subito dopo l'urto, "torna indietro", cioè "rimbalza" sulla massa m]

3. Due solenoidi, composti rispettivamente da $N_1 = 1000$ e $N_2 = 2000$ spire di filo ottimo conduttore (di resistività trascurabile), hanno la stessa lunghezza $L = 1.0$ m e sono coassiali l'uno rispetto all'altro. Come rappresentato in figura, il solenoide 1 è "interno" al solenoide 2; infatti i raggi sono rispettivamente $r_1 = 20$ cm e $r_2 = 40$ cm. Il solenoide 1 è collegato a un generatore che eroga una corrente $I_1(t)$ variabile nel tempo. In particolare si sa che la corrente è costante al valore $I_0 = 1.0 \times 10^2$ A per $t < t_0 = 0$, e quindi decresce linearmente nel tempo fino ad annullarsi completamente all'istante $t' = 2.0$ s. Il solenoide 2 è collegato a un resistore di resistenza $R = 50$ ohm. [Usate $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T m/A per la costante di permeabilità magnetica del vuoto; notate che, vista la geometria, entrambi i solenoidi possono essere bene approssimati come di lunghezza "infinita"]



- a) Scrivete esplicitamente la **funzione** del tempo che descrive l'andamento del modulo del campo magnetico $B_1(t)$ prodotto dal solenoide 1 nel solo intervallo di tempo $0 < t < t'$. [Dovete scrivere una funzione, dunque non usate valori numerici ma riferitevi ai parametri noti del problema attraverso i simboli citati nel testo]

$B_1(t) = \dots \mu_0 (N_1/L) I_0(1-t/t')$ [come suggerito nel testo, il solenoide si comporta come se fosse infinitamente lungo. Usando l'approssimazione quasi-stazionaria, il campo al suo interno è omogeneo e diretto assialmente, e ha modulo $B_1(t) = \mu_0 (N_1/L) I(t)$. L'andamento esplicito della corrente $I_1(t)$ che lo attraversa può essere facilmente determinato dalla descrizione data nel testo. Infatti la sua equazione è quella di una retta, con coefficiente angolare negativo, che collega i punti I_0 per $t = 0$ e 0 per $t = t'$. L'equazione di questa retta è semplicemente $I(t) = I_0(1-t/t')$. Da qui si ottiene la soluzione che, ovviamente è valida solo per l'intervallo di tempo specificato]

- b) Scrivete esplicitamente la **funzione** del tempo che descrive l'andamento della forza elettromotrice (o differenza di potenziale) $\Delta V_2(t)$ che si ottiene per induzione ai capi del solenoide 2 nell'intervallo di tempo $0 < t < t'$. [Anche in questo caso dovete scrivere una funzione!]

$\Delta V_2(t) = \dots (\pi r_1^2 \mu_0 N_1 N_2 / L) I_0 / t'$ [secondo la legge di Faraday, la forza elettromotrice indotta in una singola spira del solenoide 2 si trova come $\Delta V_{spira} = -d\Phi(B_1)/dt$, dove $\Phi(B_1)$ rappresenta il flusso di campo magnetico (prodotto dal solenoide 1) che attraversa la spira. Vista la geometria del sistema e considerando che il solenoide produce un campo magnetico uniforme diretto assialmente al suo interno e nullo all'esterno, è $\Phi(B_1) = B_1 \pi r_1^2$ (fate attenzione che in questa espressione deve comparire la superficie del solenoide 1, non quella della spira del solenoide 2, dato che, come già sottolineato, il campo è nullo fuori dal solenoide 1!). Introducendo l'andamento temporale di $B_1(t)$ determinato sopra ed eseguendo la derivata temporale si ottiene $\Delta V_{spira} = \mu_0 (N_1/L) \pi r_1^2 I_0 / t'$, che è costante e diversa da zero nell'intervallo di tempo considerato. Le N_2 spire che compongono il solenoide 2 sono tutte, dal punto di vista elettrico, collegate in serie. Quindi la forza elettromotrice ai capi dell'intero solenoide 2 è data da $N_2 \Delta V_{spira}$, da cui la risposta. Il segno positivo che vi compare indica che la corrente indotta nel solenoide 2 ha lo stesso verso (orario o antiorario rispetto alle spire, dal disegno non si capisce!) di quella che scorre nel solenoide 1. Ovviamente fuori dall'intervallo di tempo considerato la forza elettromotrice indotta nel solenoide 2 è nulla]

- c) Quanto vale la potenza P'' "dissipata" per effetto Joule nel resistore R nell'istante $t'' = t'/2$?

$P'' = \dots \text{ W} \quad \Delta V_2^2 / R = 5.0 \text{ W}$, con ΔV_2 determinato sopra [la potenza dissipata per effetto Joule da un resistore R ai cui capi è applicata una differenza di potenziale ΔV si esprime come $P = \Delta V^2 / R$. L'istante t'' si trova all'interno dell'intervallo temporale considerato nel quesito di cui al punto precedente, da cui la soluzione]