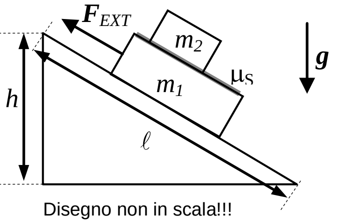
# Corso di Laurea Ing. E-A – ESAME DI FISICA GENERALE – 17/2/2016

**Nome e cognome: ……………………………………………………………… Matricola: ……………**

*Istruzioni:* ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

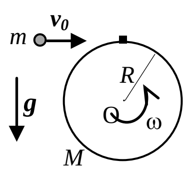
1. Un blocco di massa $m_1 = m = 10$ kg può scivolare con attrito trascurabile su un piano inclinato che ha lunghezza $\ell = 5.0$ m e altezza $h = 2.0$ m. La superficie **superiore** del blocco è **scabra** e presenta un coefficiente di attrito statico $\mu_S = 0.50$ (l'attrito è invece trascurabile per la superficie inferiore!); su di essa è appoggiato un blocchetto di massa $m_2 = m_1/2 = 5.0$ kg. **Sul blocco** di massa $m_1$ agisce una forza esterna $\boldsymbol{F_{EXT}}$ diretta come il piano inclinato, orientata verso la sua sommità e di modulo incognito. Inizialmente i due oggetti si trovano entrambi fermi in equilibrio. [Usate il valore $g = 9.8$ m/s$^2$ per il modulo dell'accelerazione di gravità]



Disegno non in scala!!!

   a) Quanto vale il modulo $F_{EXT,EQ}$ della forza esterna che mantiene in equilibrio il sistema dei due oggetti? [**Dovete** spiegare per bene, in brutta, cosa state facendo; in particolare è essenziale che disegniate il diagramma completo delle forze che agiscono sui due oggetti]
   $F_{EXT,EQ}$ = …………………………………… = ……… N $(m_1+ m_2)gh/\ell$ = 59 N [iniziamo con l'individuare tutte le forze che agiscono sui due oggetti. Sul blocco 1 agiscono la forza peso, verticale, le reazioni vincolari esercitate dal piano inclinato e dal blocchettino, ortogonali al piano inclinato e dunque non rilevanti per il suo moto, la forza esterna $\boldsymbol{F_{EXT,EQ}}$ , e la forza di attrito statico che il blocchettino 2 esercita sul blocco 1, su cui torneremo nel seguito. Sul blocchettino 2 agisce la forza peso, verticale, la reazione vincolare $\boldsymbol{N_2}$ che il blocco 1 esercita sul blocchettino 2, ortogonale al piano inclinato e dunque irrilevante per il moto, e la forza di attrito che il blocco 1 esercita sul blocchettino 2. Le "due" forze di attrito che abbiamo citato sono forze interne al sistema dei due oggetti e sono dunque una opposta all'altra. La loro direzione è quella del piano inclinato, poiché questa sarebbe la direzione dell'eventuale moto dei due oggetti nel caso in cui l'attrito non ci fosse. Per quanto riguarda il verso, è chiaro che la forza di attrito che agisce sul blocchettino 2 deve essere orientata verso l'alto del piano inclinato. Infatti se essa non ci fosse il blocchettino 2 scivolerebbe sul blocco 1 muovendosi verso il basso. Di conseguenza, la forza di attrito sul blocchettino 2 deve essere orientata verso l'alto, mentre quella che agisce sul blocco 1 verso il basso. Passiamo ora a risolvere l'esercizio, esaminando l'equilibrio per il blocco 1. Usando un riferimento diretto come il piano inclinato e orientato verso il basso, la condizione di equilibrio scritta per i moduli delle forze stabilisce: $0 = -F_{EXT,EQ} + m_1 g\sin\theta + F_A$ , dove θ è l'angolo formato dal piano inclinato con l'orizzontale e $F_A$ è il modulo della forza di attrito (ovviamente il modulo è lo stesso per le "due" forze di attrito che si generano al contatto tra blocco e blocchettino). Dalla geometria si ha $\sin\theta = h/\ell$ . Inoltre, poiché la forza di attrito è l'unica in grado di garantire l'equilibrio del blocchettino 2, deve essere in modulo $F_A = m_2 g\sin\theta$ . Si ha allora $F_{EXT,EQ} = (m_1+m_2)g\sin\theta$ , da cui la soluzione. Notate che, visto che i due oggetti sono ovviamente fermi uno rispetto all'altro nelle condizioni del problema, la soluzione è la stessa che si otterrebbe considerando il sistema come un unico corpo, però la discussione sopra presentata, oltre a essere richiesta dall'esercizio, è utile per le successive domande]
   b) A un certo istante, il modulo della forza esterna viene improvvisamente dimezzato rispetto al valore di equilibrio, cioè diventa $F_{EXT} = F_{EXT,EQ}/2$ , con $F_{EXT,EQ}$ trovato prima. In queste condizioni si osserva che il sistema dei due oggetti (blocco e blocchettino) si muove verso il basso del piano inclinato **senza scivolamento** del blocchettino di massa $m_2$ sul blocco di massa $m_1$ . Determinate il modulo della forza di attrito $F_A$ che si produce al contatto tra blocco e blocchettino in queste condizioni. Inoltre discutete quantitativamente se le condizioni descritte sono effettivamente realizzabili sulla base della conoscenza dei dati del problema.
   $F_A$ = …………………………………… = ……… N $F_{EXT}\, m_2/(m_1+ m_2) = m_2\, gh/(2\ell)$ = 9.8 N [i due oggetti partono da fermi, per cui, se si vuole che non ci sia scivolamento relativo, occorre che le loro accelerazioni siano e restino uguali. Deve cioè essere, con ovvio significato dei simboli, $a_1 = a_2$ . Sulla base della descrizione delle forze discussa al punto precedente, usando un riferimento parallelo al piano inclinato e orientato verso il basso, le equazioni del moto dei due oggetti si scrivono: $a_1 = g\sin\theta + F_A/m_1 - F_{EXT}/m_1$ e $a_2 = g\sin\theta - F_A/m_2$ . Supponendo $a_1 = a_2$ e risolvendo il sistema per l'incognita $F_A$ si ottiene la soluzione]
   Discussione: …………………………………… Occorre verificare che la forza di attrito sviluppata al contatto tra gli oggetti sia sufficiente per garantire la condizione richiesta. Si ha infatti $F_A \le \mu N_2$ , dove $N_2 = m_2 g\cos\theta$ è il modulo della reazione vincolare che il blocco 1 esercita sul blocchettino 2 . Deve allora essere $\mu_S \ge (m_2 gh/(2\ell))/(m_2 g\cos\theta)$ . Ora, per la geometria è $\cos\theta = (\ell^2 - h^2)^{1/2}/\ell$ , per cui la disuguaglianza diventa $\mu_S \ge h/(2(\ell^2-h^2)^{1/2}) \sim 0.2$ , che è effettivamente verificata nelle condizioni del problema, per cui la situazione descritta può realizzarsi.
   c) Quanto vale la velocità $v'$ che il sistema dei due oggetti acquista quando, nelle condizioni descritte al punto precedente, esso si è mosso lungo il piano inclinato per un tratto $\Delta\ell = 1.0$ m? [Ovviamente blocco e blocchettino si muovono assieme, alla stessa velocità, e la forza esterna si mantiene costante e uniforme durante il movimento]
   $v'$ = …………………………………… ~ ……… m/s $(-2F_{EXT}\Delta\ell/(m_1+ m_2)+2g\Delta\ell\, h/\ell\,)^{1/2}$ ~ 2.0 m/s [visto che l'attrito è statico, esso non compie lavoro, dunque non compare nel bilancio energetico. Questo può essere scritto nella seguente forma: $L_{FEXT} = \Delta E_K + \Delta U_G$ . La variazione di energia cinetica, tenendo conto che i due oggetti si muovono "assieme" e che partono da fermi, è $\Delta E_K = ((m_1+m_2)/2)v'^2$ , mentre la variazione di energia potenziale dovuta alla forza peso si esprime come $\Delta U_G = -(m_1+m_2)g\,\Delta h$ , dove $\Delta h = \Delta\ell\sin\theta = \Delta\ell\, h/\ell$ è la variazione di quota dei due oggetti (ovvero dei loro centri di massa), e il segno negativo tiene conto del fatto che i due oggetti diminuiscono la propria quota, cioè la propria energia potenziale dovuta alla forza peso. Infine $L_{FEXT}$ esprime il lavoro sviluppato dalla forza esterna $F_{EXT}$ ; essa è costante e uniforme e quindi il lavoro può essere espresso come $-F_{EXT}\,\Delta\ell$ , dove il segno negativo tiene conto del fatto che forza e spostamento hanno versi opposti. Mettendo tutto assieme si ottiene: $((m_1+m_2)/2)v'^2 = -F_{EXT}\,\Delta\ell + (m_1+m_2)g\,\Delta\ell\, h/\ell$ da cui la soluzione]

2. Un cilindro omogeneo di massa $M = 1.0$ kg e raggio $R = 10$ cm è imperniato sul suo asse (punto O) in modo da poter ruotare **con attrito trascurabile** su un piano verticale. Inizialmente il cilindro è fermo; a un dato istante esso viene messo in movimento da un motore che sviluppa una potenza **costante** $P = 0.50$ W e agisce per un intervallo di tempo $\Delta t = 0.50$ s. Immediatamente dopo, il motore viene spento e il cilindro continua a ruotare "in folle" (supponete che la sua rotazione sia antioraria rispetto alla figura).
   a) Quanto vale, in modulo, la velocità angolare ω del cilindro subito dopo lo spegnimento del motore?
   ω = …………………………………… = ……… rad/s $(4P\Delta t/(MR^2))^{1/2}$ = 10 rad/s [essendo gli attriti trascurabili, è $L_{MOT} = \Delta E_K$ , dove $L_{MOT}$ rappresenta il lavoro fatto dal motore per portare il cilindro alla velocità angolare ω . D'altra parte, essendo la potenza costante, si ha $L_{MOT} = P\,\Delta t$ e inoltre $\Delta E_K = (I/2)\,\omega^2 = (MR^2/4)\,\omega^2$ , da cui la soluzione, dove si è espresso il momento di inerzia per rotazione attorno al proprio asse di un cilindro pieno e omogeneo]
   b) Dopo che il cilindro ha raggiunto la velocità angolare ω e si muove "in folle", un proiettile puntiforme di massa $m = M/4 = 0.25$ kg viene sparato in modo da raggiungere la superficie laterale del cilindro, come rappresentato in figura. Sulla superficie laterale del cilindro, esso incontra un piccolo dentino di dimensioni trascurabili, su cui impatta avendo una velocità diretta orizzontalmente e di modulo $v_0$ incognito. Sapendo che l'urto può essere considerato **completamente elastico**, discutete per bene, in brutta, quali grandezze meccaniche del sistema proiettile+cilindro si conservano nell'urto, cioè restano inalterate tra "subito dopo" e "subito prima" dell'urto, spiegando chiaramente il perché.




   Discussione: ……………………… In un urto elastico si conserva, per definizione, l'energia cinetica totale del sistema. Vista la presenza del perno attorno a cui ruota il cilindro, che può essere considerato rigido e fisso, non si conserva la quantità di moto totale del sistema.

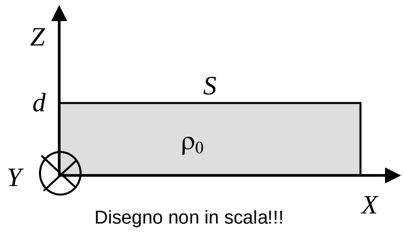
D'altronde, se essa si conservasse subito dopo l'urto il cilindro potrebbe essere animato anche da un moto traslazionale nella direzione di $\boldsymbol{v_0}$ , che invece non si verifica perché il perno vincola il cilindro a muoversi solo di rotazione. Infatti il perno esercita delle forze **impulsive** che sono esterne al sistema e determinano la mancata conservazione della quantità di moto totale. Poiché queste forze sono applicate nel punto O, si conserva il momento angolare del sistema rispetto a un polo coincidente con O, dato che le forze impulsive presenti hanno braccio nullo. Dunque si conservano energia cinetica totale e momento angolare totale. Si noti che in tutto il ragionamento non si è mai presa in considerazione la forza peso: essa è una forza esterna al sistema, ma, non avendo carattere impulsivo, provoca effetti trascurabili dal punto di vista delle conservazioni se si esaminano le differenze tra "subito" prima e "subito" dopo l'urto, come richiesto nel problema.

c) Si osserva che, subito dopo l'urto, il cilindro si ferma immediatamente, mentre il proiettile "rimbalza" tornando indietro con una certa velocità $\boldsymbol{v'}$ diretta come $\boldsymbol{v_0}$ , ma di verso opposto rispetto a questa. Quanto valgono, in modulo, $v_0$ e $v'$ ?

$v_0$ = …………………………………… ~ ……… m/s $\omega R/2$ = 0.50 m/s [vedi dopo]

$v'$ = …………………………………… ~ ……… m/s $3\omega R/2$ = 1.5 m/s [applichiamo le conservazioni delle grandezze meccaniche come stabilito nella risposta al punto precedente. Per la conservazione dell'energia cinetica si ha: $0 = \Delta E_{K,CIL} + \Delta E_{K,PRO} = -(MR^2/4)\,\omega^2 + (m/2)(v'^2 - v_0^2)$ , dove abbiamo usato il fatto che, subito dopo l'urto, il cilindro si ferma (e dunque la sua energia cinetica è nulla). Per la conservazione del momento angolare si ha $0 = \Delta L_{CIL} + \Delta L_{PRO}$ . Per il cilindro si ha $\Delta L_{CIL} = -I\omega = -(MR^2/2)\,\omega$ , dove si è considerato il momento angolare in direzione assiale (la direzione che esce dal foglio, rispetto alla figura) e si è preso come positivo il verso che corrisponde alla rotazione antioraria del cilindro (in $\Delta L_{CIL}$ compare tuttavia un segno negativo perché si tratta della differenza tra valore subito dopo e subito prima dell'urto). Il momento angolare del proiettile subito prima dell'impatto può essere espresso come $-mv_0R$ , dove si è notato che il braccio del vettore quantità di moto (ovvero del vettore velocità) è $R$ e si è messo un segno negativo coerentemente con il fatto che il verso di rotazione che sarebbe impresso al cilindro da tale quantità di moto è opposto a quello antiorario a cui abbiamo attribuito un segno positivo. Subito dopo l'urto, tenendo conto che il proiettile si muove nella stessa direzione, ma verso opposto, si ha che il momento angolare può essere espresso come $mv'R$ (il braccio è lo stesso). Dunque la conservazione dell'energia cinetica conduce a $v'^2 = v_0^2 + \omega^2(MR^2/(2m)) = v_0^2 + 2\omega^2R^2$ , dove si è usata la relazione tra le masse data nel testo. La conservazione del momento angolare conduce invece a $v_0 = 2\omega R - v'$ , dove abbiamo anche usato la relazione tra le masse. Introducendo questa relazione in quella ottenuta dalla conservazione dell'energia cinetica si ottiene la soluzione che, ulteriormente reinserita nell'ultima equazione, consente di determinare anche il valore di $v_0$ ]

3. Una lastra di materiale non conduttore è "appoggiata" sul piano $XY$ di un sistema di riferimento, come rappresentato in figura. La lastra è molto più "larga" di quanto non sia "alta", in modo da poter trascurare gli "effetti ai bordi": infatti la sezione di base vale $S = 1.0\times10^3$ cm$^2$, mentre lo spessore vale $d$ = 1.0 cm. La lastra porta una distribuzione di carica volumica omogenea $\rho_0 = 4.4\times10^{-6}$ C/m$^3$. Si sa che il campo elettrico è nullo per $z \le 0$.



Disegno non in scala!!!

a) Che direzione e verso ha, e come si esprime il modulo del campo elettrico $\boldsymbol{E}(z)$ all'interno della lastra, ovvero per $0 < z < d$ ? [Dovete scrivere un'equazione in funzione di $z$ , per cui non usate valori numerici; indicate con $\varepsilon_0$ la costante dielettrica del materiale, uguale a quella del vuoto]

Direzione e verso (e breve spiegazione del perché): ……………………….. Il problema ha una simmetria piana, dato che, supponendo idealmente infinite le dimensioni trasversali ($XY$) della lastra, come suggerito dal testo, l'unica variazione possibile delle grandezze considerate avviene nella direzione cartesiana $Z$ . In queste condizioni il campo elettrico è diretto lungo $Z$ . Infatti le superfici equipotenziali sono dei piani paralleli al piano $XY$ e, dovendo il campo elettrico essere ortogonale a queste superfici, esso deve essere diretto lungo $Z$ . Per quanto riguarda il verso, visto che la densità di carica volumica, e quindi la carica all'interno della lastra, è positiva, e visto che il campo elettrico è nullo per $z \le 0$, il campo deve essere diretto nel verso positivo di $Z$ .

$E(z)$ = ……………………….. $\rho_0 z/\varepsilon_0$ [essendo nota la direzione del campo e conoscendo la simmetria del problema, occorre utilizzare il teorema di Gauss servendosi di una scatola a forma di parallelepipedo con superficie di base pari a $S$ . Ponendo una delle superfici di base in $z < 0$ (dove il campo è nullo) e l'altra alla quota $z$ generica, si ha che il flusso del campo elettrico è non nullo solo attraverso la superficie di base superiore. Esso può quindi essere espresso come $\Phi(\boldsymbol{E}) = SE$ . D'altra parte la carica contenuta all'interno della scatola è pari al volume della sua parte che interseca la lastra, cioè $Sz$ , moltiplicato per la densità di carica volumica $\rho_0$ . Ricordando l'espressione del teorema di Gauss si ottiene la soluzione, che mostra come il campo sia una funzione linearmente dipendente dalla quota $z$ ]

b) Quanto vale la differenza di potenziale $\Delta V$ tra faccia "superiore" e faccia "inferiore" della lastra (cioè tra i punti $z = d$ e $z = 0$)? [Usare il valore $\varepsilon_0 = 8.8\times10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica nella lastra]

$\Delta V$ = …………………………….. = ........... V $-\rho_0 d^2/(2\varepsilon_0) = -$ 25 V [la differenza di potenziale si lega al campo elettrico attraverso la relazione $\Delta V = -\int_0^d \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_0^d E dz$ , dove abbiamo notato che il campo elettrico è diretto lungo $Z$ . Sostituendo l'espressione di $E(z)$ trovata sopra e esprimendo l'integrale si ottiene la soluzione. Il segno negativo indica che la faccia superiore si trova a potenziale elettrico più basso rispetto a quella inferiore]

c) Supponete ora che un elettrone (una particella di massa $m = 9.0\times10^{-31}$ kg, carica $q = -1.6\times10^{-19}$ C) incida sulla faccia "inferiore" ($z$=0) della lastra avendo una velocità iniziale di modulo $v_0 = 4.0\times10^6$ m/s diretta nel verso positivo dell'asse $Z$. Supponendo ragionevolmente che l'elettrone possa penetrare nel materiale della lastra senza "interagire meccanicamente" con esso (cioè trascurando ogni forma di attrito), quanto vale, in modulo, la velocità $v$ con cui esso raggiunge la faccia "superiore" ($z$=$d$) della lastra? [Trascurate ogni effetto della forza peso sulla dinamica dell'elettrone e sfruttate in modo opportuno quanto già risolto]

$v$ = …………………………….. ~ ........... m/s $(v_0^2 - (2q/m)\Delta V)^{1/2} \sim 2.7\times10^6$ m/s [per la conservazione dell'energia, che si applica in assenza di attriti, si ha $(m/2)v_0^2 = (m/2)v^2 + \Delta U_{ELE}$ , dove, per definizione, $\Delta U_{ELE} = q\Delta V$ . Fate attenzione al fatto che sia $q$ che $\Delta V$ sono negativo, per cui l'elettrone perde energia cinetica e viene rallentato nel passaggio attraverso la lastra]