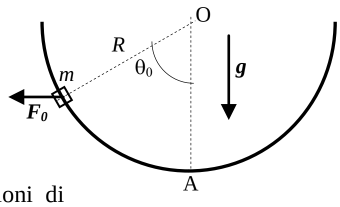
# Corso di Laurea Ing. E-A – ESAME DI FISICA GENERALE – 7/6/2016

**Nome e cognome: ………………………………………………………… Matricola: ……………**

*Istruzioni:* ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*




1. Un manicotto (puntiforme!) di massa $m$ = 50 g può scorrere con **attrito trascurabile** lungo una guida fatta da un tondino fisso e rigido che ha la forma di una semi circonferenza di raggio $R$ = 2.0 m ed è disposto su un piano verticale. Inizialmente il manicotto si trova fermo **in equilibrio** alla posizione $\theta_0 = \pi/3$ (l'angolo è quello tra "raggio vettore" e verticale, vedi figura) sotto l'azione di una forza **orizzontale,** con il verso indicato in figura, di modulo $F_0$ (incognito) costante. [Usate $g$ = 9.8 m/s$^2$ per il modulo dell'accelerazione di gravità; può farvi comodo ricordare che $sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ e $cos(\pi/3) = 1/2$ , con $\sqrt{3} \sim 1.73$]

a) Quanto vale il modulo $N_0$ della reazione vincolare esercitata dalla guida sul manicotto in queste condizioni di equilibrio?

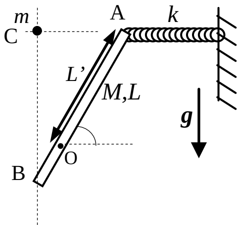
$N_0$ = ……………………. = ……… N   $mg(cos\theta_0 + sin\theta_0\, tg\theta_0) = (mg/cos\theta_0)(sin^2\theta_0+cos^2\theta_0)=mg/cos\theta_0$ = 0.98 N   [sul manicotto agiscono la reazione vincolare, di direzione radiale essendo prodotta da una guida semicircolare, la forza peso, verticale, e la forza $\boldsymbol{F_0}$, orizzontale. In direzione tangenziale la condizione di equilibrio implica: $mgsin\theta_0 = F_0cos\theta_0$; in direzione radiale, dove anche c'è equilibrio (essendo il manicotto fermo) si ha: $mgcos\theta_0 + F_0sin\theta_0 = N$. Sostituendo il valore del modulo di $F_0 = mgtg\theta_0$ trovato per l'equilibrio in direzione tangenziale si ottiene il risultato]

b) Immaginate ora che, a un certo istante, il modulo della forza applicata orizzontalmente al manicotto diventi un quarto del valore di equilibrio, cioè che esso diventi $F' = F_0/4$ . In queste condizioni il manicotto si mette in movimento: quanto vale, in modulo, la sua velocità $v'$ quando esso **passa** per il punto più basso della guida (indicato con A in figura)? [Si intende che la forza $\boldsymbol{F'}$ si mantiene sempre orizzontale, diretta verso la sinistra di figura e costantemente applicata al manicotto durante tutto lo spostamento; trascurate ogni forma di attrito]

$v'$ = ……………………. ~ ………. m/s   $(gR/4)^{1/2}$ ~ 2.2 m/s   [essendo gli attriti trascurabili si può usare il bilancio energetico: $L = \Delta E_K+\Delta U$. Visto che il manicotto parte da fermo, la variazione di energia cinetica è $\Delta E_K=(m/2)v'^2$. La variazione di energia potenziale, che è solo di tipo gravitazionale (dovuta al lavoro della forza peso), è legata alla variazione di quota $\Delta z$ ($Z$ è un asse verticale orientato verso l'alto) del manicotto: con un po' di trigonometria si vede che $\Delta z = R(cos\theta_0-1)$, per cui $\Delta U = \Delta U_G = mgR(cos\theta_0-1)$ ; questa espressione porta a un segno negativo che è in accordo con il fatto che la quota del manicotto diminuisce, per cui la sua energia potenziale deve anche diminuire. Il lavoro $L$ è quello fatto dalla forza $\boldsymbol{F'}$ : tale forza è costante e uniforme, e sempre diretta lungo l'orizzontale. Dunque il lavoro è pari al prodotto tra il modulo della forza $F'$ e la **proiezione in direzione orizzontale** (ricordate che nella definizione di lavoro c'è un prodotto scalare!) dello spostamento del manicotto. Anche qui con un po' di trigonometria si trova che tale proiezione vale $-Rsin\theta_0$, dove il segno negativo tiene conto del fatto che forza e proiezione dello spostamento hanno versi opposti tra loro. Si ha dunque $L = -F'Rsin\theta_0 = -(F_0/4)Rsin\theta_0= -(mgR\, tg\theta_0/4)\, sin\theta_0$ , dove abbiamo usato l'espressione di $F_0$ determinata nella soluzione del punto precedente. Mettendo tutto assieme, si ha allora: $(m/2)v'^2 = -(mgR\, tg\theta_0\, /4)\, sin\theta_0-mgR(cos\theta_0-1)$, cioè, esplicitando il valore delle funzioni trigonometriche, $(m/2)v'^2 =mgR(-3/8+1/2) = mgR/8$ , da cui la soluzione]

c) Quanto vale, in modulo, la reazione vincolare $N'$ che la guida esercita sul manicotto nell'istante in cui esso **passa** per la posizione considerata nella domanda precedente, cioè per il punto A di figura?

$N'$ = ……………………. ~ ………. N   $mg(1/4+1) = (5/4)mg$ = 0.61 N   [il manicotto si sta muovendo su un percorso circolare di raggio $R$ con una data velocità $v'$. Pertanto su di esso deve agire una certa accelerazione centripeta, che vale, in modulo, $a_C = v'^2/R = g/4$ , usando il risultato precedente. Questa accelerazione deve essere fornita dalle forze che hanno direzione radiale e che agiscono sul manicotto. Poiché nella posizione considerata la direzione radiale coincide con quella verticale, tali forze sono solo il peso (tutto) e la reazione vincolare incognita. L'accelerazione centripeta punta verso il centro della semicirconferenza, mentre il peso ha verso opposto. Si ha quindi $ma_C = N' – mg$ , da cui la soluzione]




2. Una sottile asta omogenea di massa $M$ = 5.0 kg e lunghezza $L$ = 50 cm è imperniata in modo da poter ruotare con **attrito trascurabile** su un piano **verticale** attorno a un perno, indicato con O in figura, che si trova a distanza $L' = 3L/4$ da un suo estremo. Allo stesso estremo dell'asta, indicato con A in figura, è agganciata l'estremità di una molla di massa trascurabile e costante elastica $k$ = 49 N/m, il cui asse è in direzione orizzontale. L'altra estremità della molla è vincolata a un muro verticale, fisso e rigido. Inizialmente l'asta è **in equilibrio** nella configurazione di figura (l'angolo indicato vale $\theta = \pi/3$) e la molla si trova compressa rispetto alla propria lunghezza di riposo. [Usate $g$ = 9.8 m/s$^2$ per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $sin(\pi/3) = 3^{1/2}/2$ e $cos(\pi/3) = 1/2$ , con $3^{1/2} \sim 1.73$]

a) Quanto valgono la compressione $|\Delta\ell|$ della molla e il **modulo** $F_O$ della forza che il perno esercita sull'asta?

$|\Delta\ell|$ = …………………………………… ~ ........... m   $(Mg/(3ktg\theta)) \sim 0.19$ m   [poiché l'asta è in equilibrio, deve essere nulla la somma dei momenti (assiali) delle forze rispetto a un qualsiasi polo. Scegliendo il polo nel perno O, le forze che fanno momento sono il peso dell'asta, applicato nel centro di massa (che si trova a metà della lunghezza dell'asta) e la forza elastica della molla, applicata al punto A. Il peso tende a far ruotare l'asta in senso orario rispetto alla figura; essendo la molla compressa, la forza elastica tende invece a far ruotare l'asta nel verso opposto. Dunque l'equilibrio è possibile e, affinché esso si verifichi, devono essere uguali i moduli dei due momenti delle forze considerati. Il braccio della forza peso, inteso come distanza tra il polo e la direzione della forza stessa, è $(L/4)cos\theta$ , mentre il braccio della forza elastica è $(3L/4)\, sin\theta$ . Inoltre il modulo della forza elastica si può scrivere come $k\Delta\ell$ , per cui all'equilibrio deve essere $k\Delta\ell(3L/4)\, sin\theta = Mg(L/4)cos\theta$ , da cui la soluzione]

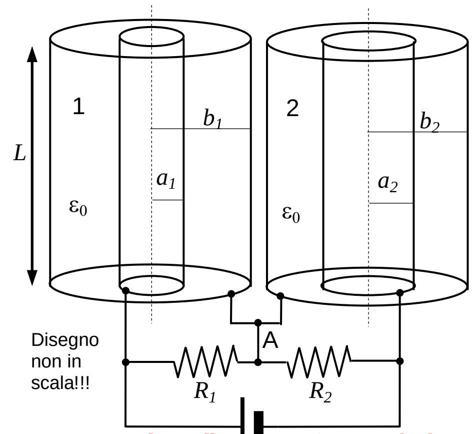
$F_O$ = …………………………………… ~ ........... N   $((Mg)^2+(k\Delta\ell)^2)^{1/2} = Mg(1+(1/(3tg\theta))^2)^{1/2} = Mg(1+1/27)^{1/2} \sim$ 49 N   [il perno garantisce l'equilibrio traslazionale all'asta. Pertanto esso deve esercitare forze che bilanciano tutte le altre forze che agiscono sull'asta, cioè il peso e la forza elastica. Queste due forze hanno direzioni ortogonali tra loro, per cui il loro modulo è semplicemente dato da $((Mg)^2+( k\Delta\ell)^2)^{1/2}$ , che è anche il modulo della forza richiesto; si nota che, nelle condizioni considerate, il perno serve soprattutto (quasi esclusivamente) per bilanciare la forza peso]

b) A un certo istante un (pesante!) proiettile puntiforme di massa $m = M/2$ = 2.5 kg viene lasciato cadere con velocità iniziale nulla dal punto C di figura: questo punto si trova sulla verticale dell'estremo B dell'asta, alla stessa altezza del punto A. Muovendosi verticalmente con **attrito trascurabile**, il proiettile colpisce l'estremità B dell'asta e vi rimane istantaneamente **conficcato**. Di conseguenza, l'asta con proiettile conficcato ruota attorno al perno: quanto vale la velocità angolare $\omega$ che l'asta con proiettile conficcato ha **subito dopo l'urto**? **Prima** di rispondere, **dovete** discutere per bene, in brutta, quali grandezze meccaniche del sistema si conservano e quali no nel processo di urto considerato.

Discussione: …………………………………… L'urto è evidentemente anelastico, poiché il sistema, prima costituito da due oggetti separati, diventa un corpo (esteso) unico subito dopo l'urto. Di conseguenza non si conserva l'energia cinetica complessiva del sistema. Inoltre è evidente che non si conserva la quantità di moto complessiva: se essa si conservasse, dopo l'urto il sistema traslerebbe in direzione verticale (questa è la direzione di moto del proiettile prima dell'urto), mentre la presenza del perno consente solo un moto di rotazione. Infatti il perno può trasferire all'asta, e quindi al sistema, forze impulsive esterne al sistema, che rendono la quantità di moto totale non conservata. Poiché queste forze impulsive sono fornite dal perno, esse hanno braccio nullo rispetto al polo O, per cui si conserva il momento angolare rispetto a questo polo. Notate, infatti, che le altre forze esterne al sistema, il peso e la forza elastica, sono non impulsive e non sono in grado di modificare momento angolare e quantità di moto complessive nella breve durata (istantanea) dell'urto.

$\omega$ = …………………………………… ~ ........... rad/s   $(6/17)((g/L)\sqrt{3})^{1/2}$ ~2.1 rad/s   [cominciamo con il notare che il proiettile incide sull'estremo B dell'asta avendo una velocità acquistata durante la discesa per il tratto $\Delta h = Lsin\theta$ . Dunque la sua velocità subito prima dell'urto è $v = (2g\, Lsin\theta)^{1/2}$ , come si ottiene immediatamente con la conservazione dell'energia meccanica del proiettile durante la discesa (che avviene con attrito trascurabile). A questo punto si può utilizzare la conservazione del momento angolare complessivo rispetto al polo O, come dichiarato nella risposta precedente. Subito prima dell'urto il momento angolare è dato dal solo movimento del proiettile, che ha quantità di moto di modulo $mv$ . Il "braccio", cioè la distanza tra polo e direzione della quantità di moto, è $(L/4)cos\, \theta$ , per cui il momento angolare (assiale) subito prima dell'urto è $(M/2)\, (2g\, Lsin\theta)^{1/2}\, (L/4)\, cos\, \theta$ . Subito dopo l'urto il momento angolare si può scrivere come $I'\omega$ , con $I'$ momento di inerzia del sistema costituito da asta e proiettile conficcato. Per l'additività del momento di inerzia, si ha $I = I_{ASTA} + I_{PRO}$ . Il momento di inerzia del proiettile è $I_{PRO} = m(L/4)^2 = ML^2/32$ (si tratta di una massa puntiforme di valore $M/2$ che ruota a una distanza $L/4$ dal perno). Per quanto riguarda l'asta, occorre tenere conto che l'asse di rotazione, il perno, si trova a distanza $L/4$ dal perno. Ricordando che il momento di inerzia per rotazione di un'asta sottile e omogenea per un asse che passa per il centro di massa è $I_{CM} = (M/12)L^2$ , usando il teorema degli assi paralleli si ottiene $I_{ASTA} = I_{CM} + M(L/4)^2 = ML^2(1/12+1/16) = (7/48)ML^2$ , per cui $I = ML^2(7/48+1/32) = M(L^2/16)(7/3+1/2)=(17/96)ML^2$ . Mettendo tutto assieme si ha: $((17/96)ML^2)\omega = (M/2)\, (2g\, Lsin\theta)^{1/2}\, (L/4)\, cos\, \theta = (ML/16)\, (gL\sqrt{3})^{1/2}$ , dove abbiamo esplicitato il valore delle funzioni trigonometriche. Da qui la risposta]

3. Avete due distinti condensatori **cilindrici**, d'ora in avanti chiamati 1 e 2, realizzati ciascuno con due gusci cilindrici sottili di materiale ottimo conduttore, coassiali tra loro e tutti di lunghezza $L$ = 1.0 m. I raggi dei vari gusci cilindrici sono $a_1 = b/4$ = 1.0 mm e $a_2 = b/2$ = 2.0 mm per i gusci "interni", $b_1 = b_2 = b$ = 4.0 mm per i gusci "esterni" (questi raggi sono uguali per i due condensatori). Lo spazio tra i gusci è vuoto. I due condensatori sono collegati a un generatore di d.d.p. (ideale) $V_0$ = 6.0x10$^2$ V come rappresentato in figura: i due resistori indicati hanno resistenza rispettivamente $R_1$ = 1.0 kohm e $R_2$ = 5.0 kohm.




a) Quanto valgono le capacità $C_1$ e $C_2$ dei due condensatori? Prima della risposta, che in sostanza si ottiene applicando una "formula", **dovete spiegare** meglio che potete, in brutta, come si fa a ottenere la "formula" in questione. [Usate $\varepsilon_0$ = 8.8x10$^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto; anche se dalla figura non sembra, i due condensatori sono **così distanti l'uno dall'altro** da poter trascurare ogni fenomeno di induzione elettrostatica fra loro]

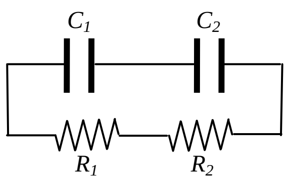
Spiega : …………………………………… La capacità è definita come $C = Q/\Delta V$ , con $Q$ carica accumulata sulle armature (i gusci cilindrici, e, per rispettare la definizione positiva della capacità si considera la carica positiva che sta su una delle armature) e $\Delta V$ la d.d.p. tra le armature (presa con il segno giusto). Poiché la capacità è una caratteristica costruttiva del dispositivo, occorre trovare delle relazioni tra cariche, campi e d.d.p. che consentano di esplicitare la capacità come funzione dei soli parametri costruttivi. Consideriamo un condensatore cilindrico generico. La geometria, o simmetria, cilindrica del sistema consente di affermare che il campo elettrico tra i gusci (ovvero tra le armature) è radiale e di modulo dipendente solo dalla coordinata radiale, che nella geometria considerata corrisponde alla distanza $r$ dall'asse dei gusci cilindrici. Applichiamo il teorema di Gauss scegliendo una scatola rappresentata da un barattolo (cilindrico), coassiale ai gusci e di raggio $r$ generico compreso tra $a$ e $b$ . Essendo il campo radiale, il flusso $\Phi(\mathbf{E})$ attraverso i "tappi" del barattolo è nullo. Quello attraverso la superficie laterale si calcola molto semplicemente, come prodotto tra il modulo del campo elettrico e della superficie laterale (infatti il campo è uniforme su tutta la superficie considerata): quindi $\Phi(\mathbf{E}) = 2\pi rLE$ , che è il primo membro del teorema di Gauss. Il secondo membro del teorema di Gauss è dato dalla carica contenuta nel barattolo (divisa per la costante dielettrica del vuoto): questa carica è quella che si trova sul guscio interno. La chiamiamo $Q$ e supponiamo sia positiva. L'applicazione del teorema di Gauss porta quindi alla **funzione** $E(r) = Q/(2\pi\varepsilon_0 rL)$ . Supponiamo ora che tra le armature sia applicata una d.d.p. $\Delta V$ e che il polo positivo del generatore che produce questa d.d.p. sia collegato al guscio interno, in modo che esso porti una carica positiva. In queste condizioni la d.d.p. tra armatura esterna e armatura interna (cioè tra i raggi $r = b$ e $r = a$) è evidentemente pari a - $\Delta V$ (l'armatura esterna è più negativa di quella interna!). Tenendo conto del legame tra d.d.p. e campo e del fatto che questo è radiale, deve essere $-\Delta V = -\int_a^b E(r)dr = -(Q/(2\pi\varepsilon_0 L))\int_a^b(1/r)dr = -(Q/(2\pi\varepsilon_0 L))\ln(b/a)$ , dove abbiamo usato una piccola conoscenza di analisi matematica a voi certamente stra-nota. Allora si ottiene in definitiva $C = 2\pi\varepsilon_0 L/\ln(b/a)$ .

$C_1$ = ……………. = ……… μF ; $2\pi\varepsilon_0 L/\ln(b_1/a_1) = 2\pi\varepsilon_0 L/\ln(4)$ = 0.40 μF $C_2$ = ……………. = ……… μF $2\pi\varepsilon_0 L/\ln(b_2/a_2) = 2\pi\varepsilon_0 L/\ln(2)$ = 0.80 μF [vedi sopra]

b) Quanto valgono, in valore assoluto, le cariche elettriche $Q_1$ e $Q_2$ accumulate sui due condensatori in condizioni stazionarie? [Fate molta attenzione al circuito costituito dal generatore di d.d.p. e dalle due resistenze!]

$Q_1$ = ………………….. = ……… C ; $(V_0R_1/(R_1+R_2))C_1 = (V_0R_1/(R_1+R_2))2\pi\varepsilon_0 L/\ln(4)$ = 2.0x10$^{-4}$ C $Q_2$ = ………………….. = ……… C $(V_0R_2/(R_1+R_2))C_2 = (V_0R_2/(R_1+R_2))2\pi\varepsilon_0 L/\ln(2)$ = 8.0x10$^{-5}$ C [la carica $Q$ accumulata su un generico condensatore di capacità $C$ le cui armature si trovano a una generica d.d.p. $\Delta V$ è, evidentemente, $Q = C\,\Delta V$ . Per stabilire la d.d.p. a cui si trovano le armature dei due condensatori occorre considerare il circuito in cui essi si trovano. Si vede come essi siano collegati in parallelo alle due resistenze $R_1$ e $R_2$ , per cui la loro d.d.p. è uguale a quella ai capi delle due resistenze. Esse sono montate in serie tra di loro e formano quindi un partitore di tensione. Si ha quindi $\Delta V_{C1} = \Delta V_{R1} = R_1 I = V_0\,R_1/(R_1+R_2)$ e $\Delta V_{C2} = \Delta V_{R2} = R_2 I = V_0\,R_2/(R_1+R_2)$ , da cui le risposte]

c) A un dato istante, il generatore di d.d.p. $V_0$ viene rimosso dal circuito e contemporaneamente il collegamento indicato con A nella figura precedente viene interrotto: per chiarezza, la figura qui a fianco rappresenta la nuova situazione (per semplicità grafica, i due condensatori sono mostrati con i propri simboli circuitali). Quanto valgono, in valore assoluto, le cariche elettriche $Q_1'$ e $Q_2'$ accumulate sui due condensatori dopo che il sistema ha raggiunto una nuova condizione **stazionaria** (cioè, dopo aver atteso un tempo sufficientemente lungo)? Anche in questo caso, prima della risposta dovete dare una **spiegazione** di cosa si verifica nella nuova situazione, la più dettagliata che vi riesce, da scrivere in brutta.




Spiega : …………………………………… Nell'istante in cui il circuito viene modificato, i condensatori, come spiegato in precedenza, sono carichi. Per come era eseguito il collegamento con il generatore di d.d.p., è ovvio che l'armatura interna del condensatore 1portava una carica positiva (era collegata al polo positivo del generatore), mentre l'armatura interna del condensatore 2 portava una carica negativa (era collegata al polo negativo del generatore). Di conseguenza le armature esterne, collegate tra loro, portavano una carica rispettivamente $-Q_1$ e $Q_2$ (dove $Q_1$ e $Q_2$ sono le cariche accumulate sui due condensatori espresse in valore assoluto). Pur essendo le due cariche di segno opposto, la loro somma algebrica $Q_{est}' = -Q_1 + Q_2$ non è nulla (si vede facilmente che essa è negativa). Dopo la modifica del circuito, la carica $Q_{est}'$ non può andare da nessuna parte (non c'è alcun collegamento con le altre armature, con la terra o chissà con cosa), per cui essa deve ancora ripartirsi tra le armature esterne dei due condensatori. Lo stesso tipo di ragionamento può essere applicato per le cariche presenti originariamente sulle armature interne, che possono circolare tra le due armature attraverso le resistenze, ma non andare da qualche altra parte. Quindi anche in questo caso c'è della carica complessiva (il suo valore è ovviamente $Q_{int}' = -Q_{est}'$) che deve ripartirsi tra le armature. Tutto ciò esclude che i due condensatori si "scarichino" completamente, cioè che $Q_1' = Q_2' = 0$ . Il flusso delle cariche che avviene nel transitorio avrà termine quando non ci sarà più alcuna d.d.p. fra le armature interne (o esterne) dei due condensatori. Infatti, finché c'è una d.d.p. le cariche continuano a muoversi attraverso fili e resistenze di collegamento. In particolare le d.d.p. tra armatura esterna ed interna dei due condensatori devono essere uguali (segno compreso), altrimenti circolerebbe corrente nelle resistenze. Questo vuol dire che $\Delta V_1' = Q_1'/C_1 = \Delta V_2' = Q_2'/C_2$ , ovvero $Q_1'/Q_2' = C_1/C_2$ , dove, per chiarezza, sono state considerate le cariche sulle armature interne dei due condensatori (la loro somma è positiva). Inoltre deve anche essere $Q_1' + Q_2' = Q_{int}' = Q_1 - Q_2$ . Si ottiene allora un sistema di due equazioni algebriche che permette di risolvere per le incognite $Q_1'$ e $Q_2'$ .

$Q_1'$ = ………………….. = ……… C ; $(C_1/(C_1+C_2))(Q_1-Q_2)$ = 4.0x10$^{-5}$ C $Q_2'$ = ………………….. = ……… C $(C_2/(C_1+C_2))(Q_1-Q_2)$ = 8.0x10$^{-5}$ C [vedi sopra: osservate che la carica accumulata sul condensatore 2 non cambia in valore assoluto, tuttavia nel processo cambiano i segni delle cariche sulle sue armature in seguito alla redistribuzione delle cariche fra i due condensatori e le loro armature]