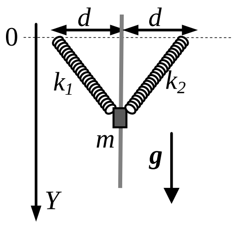
Corso di Laurea Ing. E-A – ESAME DI FISICA GENERALE – 28/6/2016

Nome e cognome: ………………………………………………………………… **Matricola: ……………**

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 2.0 kg è vincolato a scorrere con **attrito trascurabile** lungo una guida rigida (un tondino) disposta in direzione verticale (asse Y, orientato verso il basso come in figura). Il manicotto è attaccato alle estremità di due molle che hanno entrambe lunghezza di riposo **trascurabile** (in pratica, L_0 = 0!) e costanti elastiche k_1 = 2.0 N/m e k_2 = 8.0 N/m. Gli altri estremi delle due molle sono attaccati a un solaio orizzontale, rigido e indeformabile, in due punti collocati simmetricamente rispetto al tondino a distanza d = 1.0 m da esso: il punto di attacco delle due molle è alla stessa quota verticale dell'origine del riferimento che **dovete** impiegare (vedi figura). [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Quanto vale la posizione di equilibrio y_{EQ} del manicotto? [**Dovete** esprimerla usando il riferimento di figura]

y_{EQ} = …………………………………… = ……… m $mg/(k_1+k_2)$ = 2.0 m [occorre imporre che le **componenti** delle forze lungo la verticale si bilancino. Le forze in questa direzione sono il peso, che punta verso il basso, e le **componenti verticali** delle forze elastiche che puntano verso l'alto (altrimenti l'equilibrio non ci sarebbe!) e che si ottengono moltiplicando il modulo delle forze elastiche per il coseno dell'angolo compreso tra l'asse delle molle e l'asse Y. Notiamo che tale angolo è lo stesso per le due molle e che il suo valore, per la trigonometria, è dato da y/L , dove y è la posizione (generica) del manicotto e L è la lunghezza delle molle che, per Pitagora, vale $L = (y^2+d^2)$. D'altra parte il modulo della forza elastica si esprime come $F_i = k_i(L-L_0)$, con i=1,2 e L_0=0. Allora all'equilibrio deve verificarsi che $mg = (k_1+k_2)L_{EQ}y_{EQ}/L_{EQ} = (k_1+k_2)y_{EQ}$, da cui la soluzione]

b) Dimostrate, discutendo con chiarezza e dettaglio in brutta, che il moto del manicotto è armonico e determinate il periodo T dell'oscillazione. [Supponete trascurabile ogni forma di attrito]

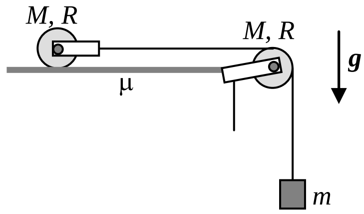
Discussione: ………………………… L'equazione del moto, ovvero l'espressione dell'accelerazione del manicotto in funzione della sua posizione (generica) y , può essere facilmente costruita tenendo conto di quanto affermato nella soluzione al punto precedente. Rispetto all'asse Y di figura, si ottiene $a = g-((k_1+k_2)/m)y$. Questa equazione del moto ha la forma $a = -\kappa_1 y+ \kappa_2$, con κ_1 costante positiva e κ_2 costante di segno qualsiasi, che è proprio quella di un moto armonico con pulsazione $\omega = ((k_1+k_2)/m)^{1/2}$.

T = …………………………………… ~ ……… s $2\pi/\omega = 2\pi(m/(k_1+k_2))^{1/2}$ ~ 2.8 s [vedi sopra]

c) Supponete ora che all'istante t_0 = 0 il manicotto, inizialmente fermo nella posizione y_{EQ} determinata prima, acquisti per qualche motivo (un colpettino, per intenderci) una velocità v_0 = 1.0 m/s diretta verso il basso di figura. Quanto vale la posizione y' che il manicotto assume all'istante $t' = T/4$, con T periodo dell'oscillazione armonica determinato sopra? [Pensate bene a cosa succede, e spiegate altrettanto bene, in brutta, come procedete per la soluzione; può essere che essa richieda di manipolare algebra un po' complicata: nel caso, potrebbe essere sufficiente impostare correttamente le equazioni rilevanti, senza risolverle]

y' = …………………………………… ~ ……… m $y_{EQ} + v_0\,(m/(k_1+k_2))^{1/2}$ ~ 2.4 m [il moto è armonico: dopo una quarto di periodo, il manicotto, che inizialmente si trovava nella posizione di equilibrio, che anche la posizione attorno a cui avviene l'oscillazione armonica, raggiunge l'ampiezza massima di oscillazione. In questo istante esso è fermo. Per dare una risposta quantitativa ci sono due strade percorribili. Nella prima si sfrutta la conservazione dell'energia meccanica, data dall'assenza di attriti. Si ha quindi $0 = \Delta E_K+\Delta U$, dove $\Delta E_K = -(m/2)v_0^2$ (all'istante "finale" il manicotto è fermo e a quello iniziale la sua velocità è v_0). La variazione di energia potenziale è dovuta sia alla variazione di quota del manicotto, $\Delta U_G = mg(y_{EQ} - y')$, dove i segni tengono conto dell'orientazione del riferimento (sarà certamente $y' > y_{EQ}$ e l'energia potenziale dovuta alla forza peso dovrà diminuire), sia alla variazione di energia elastica, ΔU_{ELA} . L'energia elastica di una molla generica che ha lunghezza di riposo trascurabile, costante elastica k e lunghezza generica L , si scrive $U_{ELA} = (k/2)L^2$. Inizialmente le due molle hanno lunghezza $L = L_{EQ} = (y_{EQ}^2+d^2)^{1/2}$. "Finalmente" le due molle hanno lunghezza $L' = (y'^2+d^2)^{1/2}$. Allora la variazione di energia potenziale elastica per la molla i è $\Delta U_{ELA,i} = (k_i/2)(y'^2-y_{EQ}^2)$. Mettendo tutto assieme si ottiene $0 = -(m/2)v_0^2 + mg(y_{EQ} - y') + ((k_1+k_2)/2)(y'^2-y_{EQ}^2)$. Questa è un'equazione algebrica di secondo grado in y' che può essere risolta per trovare la soluzione. La strada alternativa si basa sul fatto che l'ampiezza A di un'oscillazione armonica dipende da pulsazione e velocità iniziale secondo la $A = -v_0/\omega = -v_0(m/(k_1+k_2))^{1/2}$. Poiché l'oscillazione avviene attorno alla posizione di equilibrio, si ha anche $y' = y_{EQ} \pm A$, da cui la soluzione (poiché il moto avviene verso il basso, si prende il risultato corrispondente al massimo valore di y']

2. Un rullo, costituito da un cilindro pieno **omogeneo** di massa M = 1.0 kg e raggio R = 20 cm, può muoversi di **rotolamento puro** (senza strisciamento) su un piano orizzontale scabro. Il rullo è dotato di un giogo, di massa trascurabile, che ne consente la rotazione attorno al proprio asse con **attrito trascurabile**; una fune inestensibile e di massa trascurabile è collegata al giogo. Dopo essere passata per la gola di una puleggia, costituita da un cilindro analogo al precedente che può ruotare **senza attrito** attorno al proprio asse fisso, la fune termina con una massa $m = M/2$ = 0.50 kg, libera di muoversi in direzione verticale (vedi figura). La fune non slitta sulla gola della puleggia. Tutti gli oggetti sono inizialmente fermi. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Quanto vale, in modulo, l'accelerazione a con cui la massa m scende verso il basso? Quanto vale la tensione T_2 della fune nel tratto che la collega alla massa m ?

a = …………………………………… = ………… m/s^2 $g/5$ = 2.0 m/s^2 [dette T_1 e T_2 le tensioni che la fune esercita rispettivamente sul giogo e sulla massa m, nelle condizioni del problema (rotolamento puro!) si hanno le seguenti equazioni del moto: $Ma_{CM} = T_1 - F_A$; $I\alpha_{RULLO} = F_A R$; $I\alpha_{PULEGGIA} = T_2R - T_1R$; $ma = mg - T_2$, dove abbiamo usato un asse orizzontale diretto verso destra per il moto del rullo, un asse verticale verso il basso per la massa m, e stabilito come positivo il verso di rotazione orario sia per il rullo che per la puleggia. Abbiamo inoltre notato che rullo e puleggia hanno lo stesso momento di inerzia, $I = MR^2/2$. D'altra parte per l'inestensibilità della fune si ha $a_{CM} = a$, mentre per le condizioni di rotolamento puro e di non slittamento della fune sulla puleggia si ha $\alpha_{RULLO} = a_{CM}/R$ e $\alpha_{PULEGGIA} = a/R = \alpha_{RULLO}$, da cui, mettendo a sistema le equazioni, si ottiene la soluzione]

T_2 = …………………………………… = ………… N $m(g - a)$ = 3.9 N [vedi sopra]

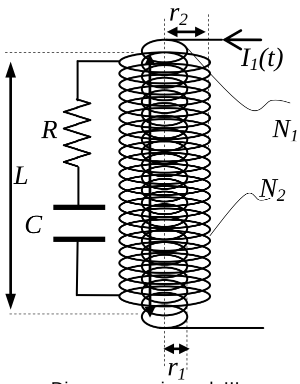
b) Stabilite il valore **minimo** del coefficiente di attrito (statico) μ_{MIN} al contatto tra rullo e piano orizzontale scabro che consente il rotolamento puro.

μ_{MIN} = …………………………………… = ………… $(mg/5)/(2mg) = 1/10$ = 0.10 [come stabilito sopra, affinché il moto sia di rotolamento puro occorre $F_A = (M/2)a = ma = mg/5$. D'altra parte è anche $F_{A,MAX} = \mu N = \mu Mg = \mu 2mg$. Il valore minimo del coefficiente di attrito richiesto si ottiene uguagliando le disequazioni, da cui la soluzione]n altre parole occorre che $2\mu \geq 1/5$, circostanza che si verifica abbondantemente, per cui il rotolamento puro è ben possibile.

c) Quanto vale la velocità v' che la massa m acquista dopo essere scesa per un tratto ΔL = 0.50 m?

v' =..………………………………..… = ………… m/s $(2g\Delta L/5)^{1/2}$= 1.4 m/s [si può utilizzare la conservazione dell'energia meccanica o risolvere direttamente la dinamica della massa. Nel primo approccio, giustificato dalla presenza di attrito statico (per il rotolamento puro) dunque di assenza di energia dissipata, si ha $0 = \Delta E_K + \Delta U = (m/2)v'^2 + (M/2)v'^2_{CM} + (I/2)\omega_{RULLO}^2 + (I/2)\omega_{PULEGGIA}^2 - mg\Delta L = (v'^2/2)(m+M+M/2+M/2) - mg\Delta L = (5/2)mv'^2 - mg\Delta L$, dove abbiamo sfruttato le relazioni cinematiche tra le varie velocità (date da rotolamento puro, non slittamento della fune sulla puleggia, in estensibilità della fune) e la relazione tra le masse. Si ottiene facilmente la risposta. L'altro approccio parte invece dalla conoscenza dell'accelerazione a determinata sopra e dalla constatazione che essa è uniforme e costante. Si ha dunque $\Delta L = (a/2)t'^2$, con t' tempo necessario a fare lo spostamento, e $v' = at'$, dove abbiamo sfruttato il fatto che la massa parte da ferma. Risolvendo si ottiene $v' = (2a\Delta L)^{1/2}$, che è ovviamente analogo al risultato già ottenuto]

3. Due solenoidi, composti rispettivamente da $N_1 = 1000$ e $N_2 = 2000$ spire di filo ottimo conduttore (di resistività trascurabile), hanno la stessa lunghezza $L = 1.0$ m e sono coassiali l'uno rispetto all'altro. Come rappresentato in figura, il solenoide 1 è "interno" al solenoide 2; infatti i raggi sono rispettivamente $r_1 = 2.0$ cm e $r_2 = 4.0$ cm. Notate che, visti i rapporti tra raggio e lunghezza, per tutti e due i solenoidi si può usare l'approssimazione di solenoide "infinito". Il solenoide 1 è collegato a un generatore di corrente che eroga una corrente di intensità $I_1(t)$ variabile nel tempo. In particolare, tale corrente è mantenuta costante al valore $I_0 = 10$ A per $t < t_0 = 0$; quindi essa diminuisce **linearmente** nel tempo, fino ad annullarsi all'istante $t' = 1.0$ s (e resta nulla per $t > t'$). Il solenoide 2 è invece collegato alla serie di un resistore di resistenza $R = 50$ ohm e un condensatore di capacità $C = 1.0$ μF (inizialmente scarico), come rappresentato in figura. [Usate $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T m/A per la costante di permittività magnetica del vuoto]



Disegno non in scala!!!

a) Come si scrive la **funzione** del tempo $I_1(t)$ che esprime l'intensità di corrente che scorre nel solenoide 1 all'istante generico t per $t_0 < t < t'$ (cioè nel solo intervallo di variazione)? [Dovete scrivere una **funzione**, dunque non usate valori numerici!]

$I_1(t)$ = ………………………….. $I_0(1-t/t')$ [l'andamento lineare citato nel testo significa che la corrente diminuisce dal valore I_0 al valore nullo seguendo un andamento "rettilineo". L'equazione di una retta generica, chiamando t la variabile indipendente, è $I_1(t) = m + qt$, con m e q costanti da determinare. All'istante $t_0 = 0$ deve essere $I_1(t=t_0=0) = m = I_0$, per cui $m = I_0$. Inoltre all'istante t' deve essere $I_1(t') = m + qt' = I_0 + qt' = 0$, per cui $q = -I_0/t'$, da cui la soluzione]

b) Discutete per bene, in brutta, cosa succede nel circuito del solenoide 2 nell'intervallo di tempo tra $t_0 = 0$ e t' .

Discussione: …………………………………… La corrente variabile $I_1(t)$ inviata nel solenoide 1, considerato infinito e usando un'approssimazione quasi-statica (cioè disinteressandosi di altri possibili effetti legati alla produzione di onde elettromagnetiche, che sono di fatto scongiurati nelle condizioni dell'esercizio) determina all'interno di questo solenoide un campo magnetico variabile nel tempo $B_1(t)$. In particolare, ricordando l'espressione per il campo del solenoide, è, nel solo intervallo di tempo considerato, $B_1(t) = \mu_0 (N_1/L)I_0(1-t/t')$. All'interno del solenoide 2 si trova allora un flusso di campo magnetico variabile nel tempo: infatti il solenoide 2 abbraccia il solenoide 1, che è quindi interno ad esso, e allora la sua sezione o, per meglio dire, la sezione delle sue spire, sente un flusso di campo magnetico variabile nel tempo $\Phi_2(\mathbf{B_1}(t)) = \pi r_1^2 B_1(t)$. La variazione temporale di questo flusso induce, secondo la legge di Faraday, una d.d.p. sul circuito del solenoide 2. In particolare, su una singola spira del solenoide 2 si avrà una d.d.p. $\Delta V_{spira} = -d\Phi_2(\mathbf{B_1}(t))/dt$. Eseguendo la derivata temporale, si ottiene facilmente $\Delta V_{spira} = \mu_0 \pi r_1^2 (N_1/L)(I_0/t')$; poiché le spire del solenoide 2 sono collegate in serie tra loro, la d.d.p. ai capi del solenoide, dunque la d.d.p. applicata alla serie di resistenza e condensatore, è $\Delta V = \mu_0 \pi r_1^2 N_2 (N_1/L)(I_0/t')$. Questa espressione rappresenta un valore costante nel tempo (all'interno dell'intervallo considerato; al di fuori di questo intervallo non c'è alcuna variazione nel tempo, per cui la d.d.p. è sempre nulla!). Dato che il condensatore è inizialmente scarico, questa d.d.p. permetterà un processo di carica, che ha un tempo caratteristico $\tau = RC = 5.0\times10^{-5}$ s $<< t'$. Pertanto per $t = t'$ il condensatore si troverà asintoticamente carico.

c) Quanto vale la carica Q' che si trova accumulata sul condensatore al termine dell'intervallo temporale considerato, cioè per $t \sim t'$? [Supponete che siano state raggiunte condizioni "stazionarie"]

Q' = ………………………….. = …….. C $\mu_0 \pi r_1^2 N_2 (N_1/L)(I_0/t')C = 3.2\times10^{-8}$ C [come già affermato, al termine dell'intervallo temporale considerato il condensatore si troverà asintoticamente carico. In queste condizioni non circola praticamente corrente nel circuito del solenoide 2, per cui è praticamente nulla la caduta di potenziale ai capi della resistenza. In conseguenza, tra le armature del condensatore si instaura la d.d.p. $\Delta V = \mu_0 \pi r_1^2 N_2 (N_1/L)(I_0/t')$ determinata sopra. Ricordando la definizione di capacità si ottiene la soluzione]

d) Come evolve nel tempo la carica $Q(t)$ accumulata nel condensatore nell'intervallo $t > t'$? [Spiegate per bene in brutta cosa succede in questo intervallo di tempo; dovete scrivere una **funzione** del tempo, per cui non usate valori numerici, ma cercate di chiarire quanto meglio che potete quanto valgono i termini che compaiono nella funzione]

$Q(t)$ = ………………………….. $Q' \exp(-(t-t')/\tau)$, con Q' determinato sopra e $\tau = RC$ [nell'intervallo considerato in questa domanda non c'è più variazione della corrente che scorre nel solenoide 1, per cui non c'è più alcuna d.d.p. applicata al circuito del solenoide 2. Le armature del condensatore si trovano allora collegate tra loro attraverso la resistenza R . Quindi il condensatore si "scarica" attraverso la resistenza. Ricordando l'espressione della scarica del condensatore, tenendo conto che la costante di tempo è $\tau = RC$ e che l'inizio della fase di scarica è all'istante $t = t'$, quando il condensatore aveva la carica Q' determinata sopra, si ottiene la soluzione]