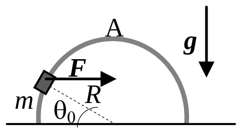
Corso di Laurea Ing. E-A – ESAME DI FISICA GENERALE – 19/7/2016

Nome e cognome: …………………………………………………………… **Matricola: ……………**

*Istruzioni: **riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.** Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un manicotto (puntiforme!) di massa m = 2.0 kg è vincolato a scorrere con **attrito trascurabile** lungo una guida rigida e fissa (un tondino) che ha la forma di una semicirconferenza di raggio R = 1.0 m disposta su un piano verticale, come rappresentato in figura. Sul manicotto agisce una forza esterna orizzontale di modulo F = 40 N; in queste condizioni si osserva che la posizione rappresentata in figura (l'angolo **misurato rispetto all'orizzontale**, indicato con θ_0, è **incognito**) è di **equilibrio.** [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]

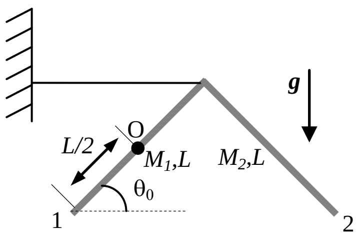


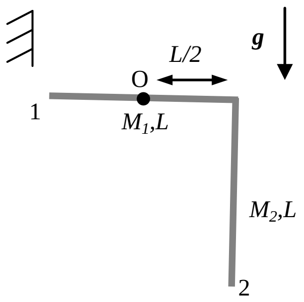
   a) Quanto vale l'angolo θ_0 ? [Si consiglia di esprimerne la tangente $tg\theta_0$]
   $tg\theta_0$ = …………………………………… = ……… mg/F = 0.49 [il manicotto è vincolato a muoversi (eventualmente!) lungo la guida, cioè in direzione "tangenziale". Nella condizione di equilibrio del testo, occorre che l'accelerazione tangenziale sia nulla, cioè che si annulli la risultante delle forze in tale direzione. Tali forze sono la componente tangenziale della forza $\boldsymbol{F}$, che vale $F\sin\theta_0$ (il segno positivo indica che abbiamo scelto un verso positivo che corrisponde a uno spostamento in senso orario, verso la destra di figura) e la componente tangenziale della forza peso, che vale $-mg\cos\theta_0$. Dunque per l'equilibrio deve essere: $0 = F\sin\theta_0 - mg\cos\theta_0$, da cui la soluzione. Per curiosità, notate che l'angolo richiesto è di circa 26 gradi. Osservate anche che, sulla base di ben note relazioni trigonometriche, si può esprimere $\cos\theta_0 = 1/(1+(tg\theta_0)^2)^{1/2} = 1/(1+(F/mg)^2)^{1/2}$ e $\sin\theta_0 = tg\theta_0/(1+(tg\theta_0)^2)^{1/2} = (F/mg)/(1+(F/mg)^2)^{1/2}$]

   b) Supponete ora che all'istante t_0 = 0 la forza esterna raddoppi il suo modulo, che diventa quindi F' = 80 N. Di conseguenza, si osserva che il manicotto comincia a muoversi nel verso orario rispetto alla figura, passando, a un dato istante, per la posizione indicata con A in figura (la sommità della guida). Quanto vale la velocità v_A del manicotto quando esso passa per tale posizione? [Naturalmente durante lo spostamento del manicotto la forza $\boldsymbol{F'}$ si mantiene costante e uniforme, e sempre applicata al manicotto]
   v_A = …………………………………… ~ ……… m/s $(2F'R\cos\theta_0/m-2gR(1-\sin\theta_0))^{1/2}$ ~ 7.8 m/s [non essendoci forze dissipative, si usa il bilancio energetico: $L_{F'} = \Delta E_K + \Delta U_G = (m/2)v_A^2+mg\Delta z$. La variazione di quota del manicotto può essere espressa, secondo la trigonometria, come $\Delta z = mgR(1-\sin\theta_0)$, con $\sin\theta_0$ espresso prima. Il lavoro della forza $\boldsymbol{F'}$ si ottiene dalla definizione: $L_{F'} = \int \boldsymbol{F'}\cdot d\boldsymbol{l} = \int F'\cdot dx = F'\Delta x = F'R\cos\theta_0$, dove l'integrale è esteso tra inizio e fine del processo considerato, si è notato che la forza è diretta lungo l'orizzontale (che abbiamo chiamato asse X), che essa è costante durante il processo e che lo spostamento del manicotto **lungo X** è dato, dalla trigonometria, da $\Delta x = R\cos\theta_0$, con $\cos\theta_0$ espresso prima. Si ha dunque $F'R\cos\theta_0 = (m/2)v_A^2+mgR(1-\sin\theta_0)$, da cui la soluzione]

   c) Quanto vale, in modulo, la reazione vincolare N_A che la guida esercita sul manicotto nell'istante in cui questo raggiunge la sommità della guida?
   N' = …………………………………… ~ ……… N $mv_A^2/R-mg = (2F'\cos\theta_0-2mg+2mg\sin\theta_0)-mg = 2F'\cos\theta_0-3mg+2mg\sin\theta_0$ ~ 1.0×10^2 N [il manicotto percorre un'orbita circolare e pertanto su di esso agisce un'accelerazione centripeta di modulo $a_C = v_A^2/R$ diretta verso il centro della semicirconferenza. Questa accelerazione centripeta è data dalle forze che hanno componente radiale, che sono la forza peso mg, diretta come l'accelerazione centripeta, e la reazione vincolare $\boldsymbol{N}$, diretta radialmente e di verso che può essere sia centripeto che centrifugo (il manicotto può esercitare la reazione si in un verso che nell'altro!). Notiamo che la forza $\boldsymbol{F'}$ non contribuisce, essendo orizzontale, dunque ortogonale alla direzione considerata. Cominciamo con l'osservare che $v_A^2/R > g$. Dunque la reazione vincolare deve avere lo stesso verso rispetto alla forza peso in modo da permettere l'ottenimento delle dovute condizioni. Si ha quindi: $v_A^2/R = g+N/m$, da cui la soluzione, dove si è ovviamente usata l'espressione di v_A trovata in precedenza]

2. Per una installazione pubblicitaria si impiega il sistema rappresentato in figura. Esso è costituito da due sottili sbarrette **omogenee** che hanno la stessa lunghezza L = 50 cm e diverse masse, rispettivamente M_1 = 1.0 kg e $M_2 = 2M_1$ = 2.0 kg. Le sbarrette sono saldate insieme ad una estremità a formare una "elle" (l'angolo tra i loro assi vale $\pi/2$). Nel punto di mezzo di una delle due sbarrette (la numero 1 di figura) si trova un piccolo foro passante: un perno rigido, fissato ad una parete verticale, passa per il foro in modo tale che l'intero sistema possa compiere rotazioni con **attrito trascurabile** su un piano verticale attorno ad un asse che passa per questo perno (il polo di rotazione è indicato con la lettera O in figura). Inizialmente il sistema è mantenuto in equilibrio da una fune disposta come rappresentato in figura: la fune è orizzontale e collega il vertice della "elle" ad una parete rigida verticale; l'angolo indicato è $\theta_0 = \pi/4$. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, con $\sqrt{2} \sim 1.41$]





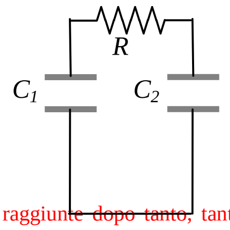
   a) Quanto vale, **in modulo**, la tensione T della fune? [Fate attenzione a considerare bene la geometria e la trigonometria!]
   T = …………………………………… = ……… N $(M_2gL\cos\theta_0)/((L/2)\sin\theta_0) = 2M_2g\cos\theta_0/\sin\theta_0 = 2M_2g$ = 39 N [per l'equilibrio del sistema rispetto a rotazioni attorno ad un asse passante per il perno occorre che siano bilanciati i momenti delle forze. Le sole forze esterne che fanno momento sono la forza peso della sbarretta 2, applicata al centro di massa della sbarretta stessa, cioè a metà della sua lunghezza (la sbarretta è omogenea!) e la tensione della fune. Infatti il peso della sbarretta 1 è applicato al polo e quindi ha braccio e momento nulli. Questi due momenti conducono a rotazioni in versi opposti, dunque è sufficiente uguagliarne i moduli. La risposta si ottiene notando che il braccio della forza peso agente sulla sbarretta 2 è $2(L/2)\cos\theta_0$ mentre il braccio della tensione della fune è $(L/2)\sin\theta_0$. Notate anche che lo stesso risultato si deve ottenere considerando la forza peso dell'intero sistema applicata al centro di massa dell'intero sistema (c'è un po' più di geometria da fare…)]

   b) Quanto vale il momento di inerzia I_{tot} della "elle" per rotazioni attorno al polo O?
   I_{tot} = …………………………………… = ……… kg m^2 $M_1L^2(1/12+7/6) = (15/12)M_1L^2$ = 0.31 kg m^2 [poiché i momenti di inerzia si sommano, si ha $I_{TOT}=I_1+I_2$, con I_2 e I_2 momenti di inerzia separati delle due sbarrette per rotazione attorno al polo O indicato. Per la sbarretta 1 il polo coincide con il centro di massa ed è noto (se non lo fosse si potrebbe facilmente calcolare) che $I_1 = M_1L^2/12$. Per il calcolo di I_2 occorre servirsi del teorema degli assi paralleli, che, noto il momento di inerzia per rotazione attorno al centro di massa, $I_{2cm} = M_2L^2/12$, stabilisce $I_2 = I_{2cm}+M_2d^2$. In questa espressione, d è la distanza tra i due assi paralleli considerati, cioè la distanza tra O e il centro di massa della sbarretta 2, che vale $d = 2(L/2)\cos\theta_0 = L/\sqrt{2}$. Dunque è $I_2 = M_2L^2/12 + M_2L^2/2 = (7/12)M_2L^2 = (7/6)M_1L^2$. Da qui la soluzione]

   c) Nella sua rotazione, ad un dato istante la "elle" si viene a trovare nella configurazione di figura, in cui la barretta 1 ha il proprio asse in direzione orizzontale. Quanto vale la velocità angolare ω del sistema in questo istante?

ω = …………………………………… ~ ………. rad/s $(2M_1g(L/2)/I_{TOT})^{1/2}$ = $(12g/(15L))^{1/2}$ ~ 4.8 rad/s [nella rotazione si conserva l'energia meccanica del sistema: $\Delta E_k+\Delta U_G = 0$. Essendo tutto inizialmente fermo, la variazione di energia cinetica si scrive $I_{TOT}\omega^2/2$, con I_{TOT} momento di inerzia complessivo del sistema calcolato alla risposta precedente. La variazione di energia potenziale (della forza peso) è dovuta al fatto che il centro di massa della sbarretta 2 diminuisce la sua quota di un tratto che, in modulo, vale $(L/2)$. Da qui la soluzione. Notate che lo stesso risultato si ottiene anche considerando la variazione di quota del centro di massa dell'intero sistema, che vale $(L/2)\sin\theta_0\cos\theta_0$, ma per il quale occorre considerare la massa M_1+M_2 dell'intero sistema]

3. Avete a disposizione due condensatori, di capacità rispettivamente C_1 = 1.0 μF e C_2 = 5.0 μF. **Preliminarmente** il condensatore 1 viene collegato a un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 1.0 kV fino a raggiungere condizioni stazionarie (di equilibrio). Il condensatore 2, invece, non viene collegato a un bel niente e dunque rimane scarico (globalmente neutro). Quindi il generatore viene **rimosso** e i **due** condensatori vengono collegati tra loro attraverso un resistore di resistenza R = 50 kohm, come rappresentato schematicamente in figura. Dopo aver atteso tempo sufficiente a raggiungere nuove condizioni stazionarie, quanto vale la carica Q_2' accumulata sul condensatore 2?



a) Q_2' = ... = ……… C $C_1C_2V_0/(C_1+C_2)$ = 8.3x10^{-4} C [nelle nuove condizioni stazionarie, raggiunte dopo tanto, tanto tempo, i due condensatori si troveranno alla stessa differenza di potenziale $\Delta V'$. Infatti le condizioni stazionarie (di equilibrio) richiedono che non passi corrente attraverso il resistore, che dunque non presenta caduta di potenziale. In queste condizioni si avrà $Q_1'/C_1 = Q_2'/C_2$, dove le capacità sono quelle calcolate al punto precedente. Inoltre, dato che il generatore è stato rimosso, la quantità di carica totale deve conservarsi, cioè deve essere $Q_1'+Q_2' = Q_{10} = C_1V_0$. Si forma un sistema di due equazioni e due incognite che, risolto, fornisce la soluzione. Notate che, al termine del processo, cioè una volta che sono state raggiunte le nuove condizioni stazionarie, i due condensatori si trovano collegati in parallelo fra loro, dando luogo a una capacità equivalente $C_{TOT} = (1/C_1+1/C_2)^{-1}$, e la carica sui due condensatori è ripartita come specificato sopra]

b) Quanto vale l'energia E che viene "dissipata" per effetto Joule dal resistore nel corso dell'**intero** processo? [Per "intero processo" si intende quello che ha inizio nell'istante in cui il condensatore 1, inizialmente carico, viene collegato tramite il resistore al condensatore 2, inizialmente scarico, secondo lo schema di figura e che termina quando vengono raggiunte le nuove condizioni stazionarie, cioè dopo tantissimo tempo. Fate attenzione: si chiede un'energia, non una potenza!]

E = ... = …….. J $-C_{TOT}V_0^2/2$ = -0.42 J [si può ragionare in termini di bilancio energetico: E allora rappresenterà la differenza tra l'energia inizialmente accumulata nel condensatore 1 e la somma di quella che alla fine si trova nei due condensatori, Ricordando che l'energia di un condensatore è $U_E = Q^2/(2C)$, si avrà: $E = Q_1'^2/(2C_1)+ Q_2'^2/(2C_2)-Q_{10}^2/(2C_1)$. Usando la solita relazione di conservazione della carica, $Q_1'=Q_{10}-Q_2' = C_1V_0 - Q_2'$ e facendo un po' di algebra, si trova: $E = Q_2'^2/(2C_{TOT})- Q_2'V_0$ da cui, sostituendo l'espressione di $Q_2' = C_{TOT}V_0$ trovata prima e usando C_{TOT} già definito, la soluzione, dove il segno negativo sta a indicare che questa energia è stata "dissipata"]

c) Quanto vale il "tempo caratteristico" τ del processo che stiamo considerando?

τ = ... = ……… μs $RC_1C_2/(C_1+C_2)$ = 42 ms [il modo più semplice di rispondere consiste nel verificare, guardando lo schema, che il processo consiste nella scarica (parziale) del condensatore 1 e la carica del condensatore 2. I due condensatori sono in serie fra di loro, per cui la capacità effettiva (totale) è, come già osservato, $1/C_{TOT} = 1/C_1+1/C_2$. La costante tempo sarà allora data dal prodotto RC_{TOY}. Un modo più convincente consiste nel notare che la d.d.p. ai capi del condensatore C_2, che istante per istante è sempre esprimibile come Q_2/C_2, è sempre pari alla somma della d.d.p. ai capi del condensatore C_1, che è sempre pari a Q_1/C_1 , e della caduta di potenziale attraverso il resistore, che per la legge di Ohm vale RI. Si ha cioè $Q_2/C_2=Q_1/C_1+RI$. Inoltre per la conservazione della carica si ha anche $Q_{10}=C_1V_0 = Q_1+Q_2$, per cui l'equazione precedente si può riscrivere come: $Q_2/C_2=V_0-Q_2/C_1 + RI$. D'altra parte la corrente che circola nel circuito è fatta dalle cariche che lasciano il condensatore 1 per andare nel condensatore 2. Tenendo conto di come è realizzato il circuito, questo implica che $I = -dQ_2/dt$. Si ottiene allora una bellissima equazione differenziale: $dQ_2/dt = -Q_2/(RC_{TOT})+V_0/R$, che è a variabili separabili e ha come soluzione $Q_2(t) = V_0C_{TOT}(1-e^{-t/\tau})$, con $\tau = RC_{TOT}$]