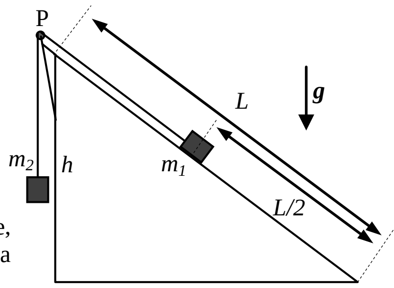
Corso di Laurea Ing. E-A – ESAME DI FISICA GENERALE – 9/9/2016

Nome e cognome: …………………………………………………………… **Matricola: ……………**

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Una cassa (puntiforme, anche se dal disegno non sembra!) di massa $m_1 = 2m$ = 10 kg si trova su un piano inclinato, di altezza h = 4.0 m e lunghezza $L = 5h/4$ = 5.0 m, su cui può muoversi con **attrito trascurabile**. Alla cassa è attaccato l'estremo di una fune inestensibile e di massa trascurabile al cui altro estremo si trova un *peso* di massa $m_2 = m$ = 5.0 kg, libero di muoversi in direzione verticale. La fune, dopo un tratto in cui si trova parallela al piano inclinato, può scorrere con **attrito trascurabile** attorno a un perno (indicato con P in figura) montato sulla sommità del piano inclinato stesso e ad esso solidale. Inizialmente gli oggetti (cassa e *peso*) sono tenuti fermi da una qualche causa esterna, e la cassa si trova "a metà strada" sul piano inclinato, come rappresentato in figura. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) A un dato istante, la causa esterna che tiene fermi gli oggetti viene improvvisamente rimossa, e, dunque, essi prendono a muoversi, mantenendosi in collegamento meccanico tramite la fune e senza ricevere alcuna velocità iniziale. Quanto vale, in modulo, l'accelerazione a_1 della cassa?

a_1 = …………………………………… = ……… m/s^2 $mg(8/5-1)/(3m) = g/5$ = 2.0 m/s^2 [cominciamo con il notare che, per semplici ragioni geometriche, l'angolo θ tra piano inclinato e orizzontale è tale che $\sin\theta = h/L = 4/5$, in modo da poter impiegare nella risoluzione l'espressione dell'angolo. Stabilito ciò, osserviamo che a muoversi sono **due** oggetti e quindi la soluzione del quesito richiede di scrivere **due** equazioni del moto, da accoppiare opportunamente tra loro. Visto che, presumibilmente, nel moto la cassa scenderà verso il basso (beh, si intuisce considerando quanto valgono le masse in gioco!) e il peso salirà verso l'alto, usiamo un riferimento verticale orientato verso l'alto per il peso e uno parallelo al piano inclinato e orientato verso il basso per la cassa. Indicando con T il modulo della tensione della fune, si ha facilmente: $a_1 = g\sin\theta - T/m_1 = 4g/5 - T/(2m)$, e $a_2 = T/m_2 - g = T/m - g$. Poiché la fune è inestensibile, lo spostamento di uno dei due corpi è uguale, in modulo, a quello dell'altro, per cui $a_1 = a_2$ (la scelta dei segni è corretta, visto come è orientato il sistema di riferimento impiegato). Dunque si ottiene un sistema di tre equazioni e tre incognite (a_1 , a_2 , T). Risolvendolo per a_1 si ottiene la soluzione (il segno positivo garantisce che effettivamente la cassa si muova verso il basso, e il fatto che si sia ottenuta una frazione di g è in ovvio accordo con una descrizione qualitativa del problema)]

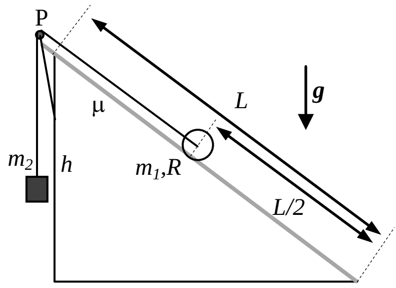
b) Quanto vale, in modulo, la tensione T della fune mentre gli oggetti si muovono?

T = …………………………………… = ……… N $m_2(a_2+g) = m(a_1+g) = 6mg/5$ = 59 N [viene direttamente dalla soluzione del sistema di equazioni di cui sopra, stavolta condotta per l'incognita T]

c) Quanto vale l'intervallo di tempo Δt necessario perché la cassa raggiunga la base del piano inclinato? [Ricordate che la cassa è puntiforme e che essa parte dalla "metà" del piano inclinato]

Δt = …………………………………… ~ ……… s $(L/a_1)^{1/2} = (5L/g)^{1/2} \sim$ 1.6 s [il moto della cassa è uniformemente accelerato e avviene verso la base del piano inclinato con accelerazione a_1 . Inoltre la velocità iniziale è nulla. Pertanto la legge oraria del moto è $\Delta s = a_1 (\Delta t)^2/2$, da cui, sostituendo $\Delta s = L/2$ e risolvendo, la soluzione (che ovviamente va presa col segno positivo)]

2. Un cerchione di bicicletta, di massa $m_1 = 2m$ = 0.40 kg e raggio R = 50 cm, si trova su un piano inclinato **scabro**, di altezza h = 4.0 m e lunghezza $L = 5h/4$ = 5.0 m, su cui può muoversi di **rotolamento puro**. Al mozzo (asse) del cerchione è attaccato l'estremo di una fune inestensibile e di massa trascurabile al cui altro estremo si trova un *peso* di massa $m_2 = m$ = 0.20 kg, libero di muoversi in direzione verticale. La fune, dopo un tratto in cui si trova parallela al piano inclinato, può scorrere con **attrito trascurabile** attorno a un perno (indicato con P in figura) montato sulla sommità del piano inclinato stesso e ad esso solidale. Inizialmente gli oggetti (cerchione e *peso*) sono tenuti fermi da una qualche causa esterna, e il cerchione si trova "a metà strada" sul piano inclinato, come rappresentato in figura. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che in un cerchione di bicicletta si può assumere che la massa si trovi tutta alla sua periferia, cioè che siano trascurabili le masse dei raggi e lo spessore del cerchione stesso; inoltre si intende che il cerchione è omogeneo]



a) A un dato istante, la causa esterna che tiene fermi gli oggetti viene improvvisamente rimossa, e, dunque, essi prendono a muoversi (il cerchione di **rotolamento puro**), mantenendosi in collegamento meccanico tramite la fune e senza ricevere alcuna velocità iniziale. Quanto vale, in modulo, l'accelerazione a_{CM} del centro di massa del cerchione?

a_{CM} = …………………………………… = ……… m/s^2 $3g/25$ = 1.2 m/s^2 [cominciamo con il notare che, per semplici ragioni geometriche, l'angolo θ tra piano inclinato e orizzontale è tale che $\sin\theta = h/L = 4/5$, in modo da poter impiegare nella risoluzione l'espressione dell'angolo. Stabilito ciò, osserviamo che a muoversi sono **due** oggetti e quindi la soluzione del quesito richiede di scrivere tutte le equazioni del moto rilevanti. Dato, poi, che il cerchione di bicicletta è un oggetto esteso (corpo rigido) che rotola, cioè ruota e trasla, esso contribuisce con **due** equazioni del moto, rispettivamente per la traslazione del centro di massa e per la rotazione attorno al proprio asse geometrico (a cui è attaccata la fune). In totale, quindi, abbiamo tre equazioni del moto da accoppiare fra loro e in cui le forze da considerare sono i pesi, la tensione della fune (che scriviamo con il suo modulo, T) e la forza di attrito, di modulo **incognito** (è un attrito statico a causa del rotolamento puro!) che il piano esercita sulla generatrice del cerchione che vi è a contatto. La direzione di questa forza è parallela al piano inclinato, il suo verso è tale da opporsi al moto incipiente del punto, ovvero della generatrice, di contatto. Se non ci fosse attrito, questo punto si muoverebbe verso il basso, per cui l'attrito è diretto verso l'alto del piano inclinato. Infine, nello scrivere le equazioni del moto traslazionale, usiamo un riferimento verticale orientato verso l'alto per il peso e uno parallelo al piano inclinato e orientato verso il basso per il cerchione; inoltre per la rotazione scegliamo come positivo il verso di rotazione del cerchione quando la sua traslazione è positiva, cioè quando esso scende verso il basso del piano inclinato. Basta poco per rendersi conto che questo implica che il verso orario (rispetto alla figura) è quello che prendiamo come positivo. Tenendo conto di tutto questo, si ha facilmente: $a_{CM} = g\sin\theta - T/m_1 - F_A/m_1 = 4g/5 - T/(2m)\ F_A/(2m)$; $a_2 = T/m_2 - g = T/m - g$. Per quanto riguarda il moto rotazionale, osserviamo che esso può essere descritto usando come polo il centro di massa, rispetto al quale la sola forza di attrito ha braccio (pari a R), e quindi momento, non nullo. Dunque $\alpha = F_A R/I$. Inoltre, nel cerchione si ha $I = m_1R^2 = 2mR^2$, dato che tutta la massa si trova a distanza R (approssimativamente, come suggerito dal testo) rispetto al polo. Allora si ha $\alpha = F_A/(2mR)$. A questo punto disponiamo di tre equazioni che contengono cinque incognite (oltre alle accelerazioni, anche T e F_A). Le ulteriori due equazioni sono quelle che collegano le accelerazioni fra loro, cioè $a_{CM} = a_2$ (diretta conseguenza della inestensibilità della fune e della scelta del riferimento per le traslazioni) e $\alpha = a_{CM}/R$ (per il rotolamento puro). Il sistema si può risolvere e la risposta è proprio la soluzione per l'incognita cercata]

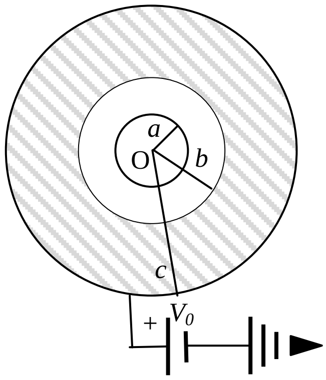
b) Quanto vale, in modulo, la velocità v_{CM}' del centro di massa del cerchione nell'istante in cui esso raggiunge la base del piano inclinato?

v_{CM}' = …………………………………… ~ ……… m/s $(3gL/25)^{1/2} \sim$ 2.4 m/s [ci sono due possibili strade per risolvere il problema, La prima, più immediata ma meno elegante, si basa su quanto già determinato in precedenza: possiamo infatti affermare che il centro di massa del cerchione si muove di moto uniformemente accelerato, con accelerazione a_{CM} stabilita prima. Esso parte da fermo e deve percorrere un tratto $\Delta s = L/2$. La legge oraria del moto è quindi $\Delta s = a_{CM} (\Delta t)^2/2$, e quella della velocità è $v_{CM} = a_{CM}\ \Delta t$. Tenendo conto dello spostamento percorso, combinando le due equazioni si ottiene facilmente $L/2 = a_{CM} (v_{CM}'/a_{CM})^2/2$, ovvero $L = v_{CM}'^2/a_{CM}$, da cui la risposta. In alternativa si può ragionare in termini di conservazione dell'energia meccanica, che si verifica poiché nel moto di rotolamento puro la forza di attrito (statico!) non compie lavoro. Si ha quindi $0 = \Delta E_K + \Delta U$. In questa equazione è $\Delta E_K = (m_1/2)\ v_{CM}'^2 + (I/2)\omega'^2 + (m_2/2)\ v_2'^2 = mv_{CM}'^2 + mv_{CM}'^2 + (m/2)\ v_{CM}'^2 = (5/2)\ mv_{CM}'^2$, dove abbiamo tenuto conto dei tre distinti contributi alla variazione di energia cinetica (che è ovviamente nulla all'inizio!), della condizione di rotolamento puro $\omega' = v_{CM}'/R$, dell'inestensibilità della fune, per cui $v_2' = v_{CM}'$, e abbiamo usato la relazione tra le masse e l'espressione del momento di inerzia per il cerchione di bicicletta. La variazione di energia potenziale è dovuta alla variazione della quota del centro di massa, che si abbassa (la variazione è negativa) per un tratto $(L/2)\sin\theta = (2/5)L$, e del *peso*, che si alza per un tratto $L/2$. Di conseguenza è $\Delta U = -m_2g(2/5)L + m_1gL/2 = mg(-4/5+1/2) = -(3/10)mgL$. Mettendo tutto assieme si trova $(5/2)mv_{CM}'^2 = (3/10)mgL$, che conduce alla stessa risposta]

c) Quanto è il valore **minimo** μ_{min} del coefficiente di attrito al contatto tra superficie del piano inclinato e cerchione che consente di avere moto di rotolamento puro nella discesa del cerchione verso la base del piano inclinato? [Si intende: nelle condizioni di cui al punto a), cioè con fune e *peso*, etc. etc.]

μ_{min} = …………………………………… = ……… $1/5 = 0.20$ [il moto di rotolamento puro del cerchione è descritto dal sistema di equazioni trovate prima. Questo sistema può essere risolto per l'incognita F_A, ottenendo $F_A = 2ma_{CM} = 6mg/25$. Questo valore di forza di attrito è quello necessario perché il cerchione compia effettivamente il moto di rotolamento puro. L'attrito (statico) di cui si sta parlando è prodotto dal contatto tra la generatrice del cerchione e il piano inclinato, per cui esso è descritto dalla **diseguaglianza** $F_A \le \mu N$, con N modulo della reazione vincolare tra cerchione e piano inclinato. Poiché l'unica forza che ha componente normale al piano inclinato è la forza peso $m_1 g = 2mg$, ci si rende conto facilmente che $N = 2mg\cos\theta$. Per la trigonometria, si ha $1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$, da cui $\cos\theta = 3/5$. Quindi $F_A = 6mg/25 \le \mu N = \mu 6mg/5$, da cui $1/5 \le \mu$. La risposta si ottiene sostituendo la disuguaglianza con una uguaglianza (si cerca infatti il valore minimo del coefficiente di attrito)]

3. Un dispositivo elettrico è costituito da una superficie sferica (un guscio molto sottile) di raggio a = 5.0 mm concentrica a un guscio **spesso**, di raggio interno $b = 2a$ =10 mm e raggio esterno $c = 2b$= 20 mm. Superficie sferica e guscio sono entrambi fatti di materiale **ottimo conduttore**; lo spazio in $r<a$, $a<r<b$, $r>c$ è vuoto. La superficie sferica di raggio $r=a$ possiede una carica $q = 2.0\times10^{-9}$ C distribuita uniformemente, mentre il guscio sferico è inizialmente scarico. Ad un certo istante il guscio sferico viene collegato al polo positivo di un generatore di differenza di potenziale $V_0 = 1.0\times10^3$ V, il cui polo negativo è collegato a **terra**, come rappresentato in figura; si attende un tempo sufficientemente lungo perché possano essere raggiunte condizioni **stazionarie** (di equilibrio). [**Nota**: la valutazione delle vostre risposte dipenderà, per questo esercizio più ancora che per gli altri, dalla qualità e correttezza delle spiegazioni che saprete dare in brutta per tutti i passaggi eseguiti]



a) Qual è, in condizioni stazionarie (di equilibrio), l'espressione del campo elettrico $E(r)$ in funzione della distanza r dal centro O del sistema nelle tre regioni di spazio $r<a$, $a<r<b$, $b<r<c$? [Dovete scrivere delle **funzioni** di r : non usate alcun valore numerico, ma indicate i parametri necessari usando i simboli letterali del testo; osservate che le tre espressioni richieste sono indicate qui di seguito come $E_I(r)$, $E_{II}(r)$, $E_{III}(r)$; ovviamente si richiede di esprimere l'**ampiezza** dei campi]

$r<a : E_I(r)$ = ……………………………… 0 [il problema ha un'ovvia simmetria sferica, e quindi l'espressione dei campi elettrici può essere ottenuta usando il teorema di Gauss applicato su scatole sferiche concentriche al sistema e di raggio variabile in modo da ottenere le dipendenze funzionali richieste. Tenendo conto che la simmetria cilindrica implica campi radiali e dipendenti solo da r , il teorema di Gauss conduce a un'espressione generica del tipo: $E(r)\, 4\pi r^2 = Q_{int}/\varepsilon_0$, dove ε_0 è la costante dielettrica del vuoto e Q_{int} la carica contenuta all'interno della scatola sferica considerata. Ora, per $r<a$, la scatola sferica è interna alla superficie sferica che reca la carica q . Pertanto all'interno della scatola non si trova alcuna carica. Di conseguenza, il campo è uniformemente nullo in questa regione]

$a<r<b : E_{II}(r)$ = ……………………………… $q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ [qui la scatola sferica comprende al suo interno la superficie che reca la carica q , per cui $Q_{int} = q$, da cui la soluzione]

$b<r<c : E_{III}(r)$ = ……………………………… 0 [fermo restando quanto già discusso, in questo caso specifico c'è un'ulteriore importante considerazione da fare: la regione considerata si trova all'interno di un materiale conduttore, e in condizioni stazionarie il campo elettrico in un conduttore è nullo. Infatti, se così non fosse, non ci sarebbe equilibrio, cioè ci sarebbero cariche elettriche in movimento nel conduttore. La risposta è quindi immediata]

b) Quanto valgono le cariche elettriche Q_b e Q_c che, in condizioni stazionarie (di equilibrio), vengono a trovarsi sulle superfici interna ed esterna del guscio (quelle di raggio rispettivamente $r=b$ e $r=c$)? [Usate $\varepsilon_0 = 8.8\times10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto]

Q_b = …………………………….. = ………. C $-q = -2.0\times10^{-9}$ C [questa è una diretta conseguenza dell'affermazione svolta in precedenza sul campo elettrico E_{III} . Infatti per una scatola sferica di raggio compreso fra b e c la carica contenuta nella scatola è la somma algebrica di q e di Q_b , che deve essere nulla perché nullo è il primo membro del teorema di Gauss]

Q_c = …………………………….. = ………. C $4\pi\varepsilon_0 c V_0 = 2.2\times10^{-9}$ C [per rispondere a questa domanda occorre sfruttare un'ulteriore condizione del problema. Si sa infatti che il guscio sferico si trova al potenziale V_0 rispetto a terra, ovvero, convenzionalmente, rispetto a un punto che si trova a grande distanza (matematicamente infinita) dal centro del sistema. La differenza di potenziale ΔV_{12} tra due punti *1* e *2* generici nello spazio, può essere calcolata una volta che è nota la dipendenza funzionale del campo elettrico. Poiché ci troviamo in simmetria sferica, è sufficiente conoscere l'espressione del campo elettrico in funzione di r . In queste condizioni, l'espressione generale è $\Delta V_{12} = -\int_1^2 E(r)dr$. I punti di nostro interesse (quelli per i quali conosciamo la d.d.p.) sono $r=c$ e $r=\infty$ per cui il percorso da fare per il calcolo dell'integrale (di linea) può essere scelto tutto esterno al sistema considerato. In questa regione di spazio, il campo elettrico si può ancora esprimere usando Gauss. Si ha $E_{IV}(r) = Q_{int}/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, dove Q_{int} è la carica interna a una scatola sferica di raggio $r>c$, cioè $Q_{int}=q+Q_b+Q_c=Q_c$, stante la condizione trovata sopra. La d.d.p. $\Delta V_{c\infty}$ tra di due punti di nostro interesse è stabilita dal generatore e vale $\Delta V_{c\infty} = -V_0$ (attenti ai segni: il segno negativo significa che, poiché il guscio è collegato al polo positivo del generatore, la terra, cioè il punto a distanza "infinita", si trova a un potenziale minore, e quindi la d.d.p. è negativa). Allora deve essere $-V_0 = -\int_c^\infty (Q_c/(4\pi\varepsilon_0 r^2))dr = -Q_c/(4\pi\varepsilon_0 c)$, dove abbiamo svolto e calcolato l'integrale negli estremi di interesse (state attenti ai segni e osservate che, alla fine, è ragionevole che la carica sia positiva essendo il polo positivo del generatore collegato al guscio sferico). Da qui la soluzione]

c) Quanto vale, in condizioni stazionarie (all'equilibrio), il **potenziale elettrico** ϕ_0 che si misura al centro del sistema, ovvero nel punto r=0? [Si intende che il potenziale elettrico equivale alla differenza di potenziale tra la posizione indicata e un punto a potenziale nullo]

ϕ_0 = …………………… = ………… V $V_0+q/(8\pi\varepsilon_0 a) = 2.8\times10^3$ V [abbiamo già ricordato come il potenziale sia nullo per un punto posto all'"infinito". Dunque si ha: $\phi_0 = \Delta V_{\infty 0} = -\int_\infty^0 E(r)dr = \int_0^\infty E(r)dr$. Osserviamo che per andare dal centro del sistema all'"infinito" dobbiamo attraversare diverse regioni di spazio con espressioni e valori del campo differenti. L'integrale si spezza dunque nella somma di quattro integrali per le quattro regioni individuate prima. Fortunatamente nelle regioni I e III, dove il campo è nullo, è nulla anche la d.d.p., e inoltre l'integrale nella regione IV (lo abbiamo già svolto prima, in pratica!) dà V_0 . L'unico integrale che resta da calcolare è $\Delta V_{ab} = -\int_a^b E_{II}(r)\, dr = -(q/\, 4\pi\varepsilon_0)(-1/a+1/b)$, dove abbiamo eseguito il calcolo. Mettendo tutto assieme, facendo un minimo di algebra e usando la relazione tra i raggi si ottiene la risposta] ΔV indica la differenza di potenziale tra il punto $r=0$ e un punto posto praticamente all'infinito, dove il potenziale è nullo. Per definizione è quindi $\Delta V = -\int_{r=\infty}^{r=0} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_0^\infty E dr$, dove si è usata la circostanza che il campo elettrico, dove presente, è sempre radiale per la simmetria sferica del problema. Nel sistema lo spazio è suddiviso in diversi sottospazi: all'equilibrio, il campo per $r<a$ è nullo, così come è nullo il campo per $b<r<c$. Inoltre si sa, per la presenza del generatore, che la differenza di potenziale tra $r=c$ (ovvero $r=b$, il guscio è equipotenziale!) e l'infinito vale V_0. Pertanto l'espressione si può semplificare in questo modo: $\phi_0 = \int_a^b E dr + V_0$, dove il campo elettrico è quello generato dalla carica distribuita (si suppone uniformemente, all'equilibrio) sul la superficie sferica di raggio $r=a$, cioè $E(r) = q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$. Da qui, svolgendo l'integrale, si ottiene la soluzione]