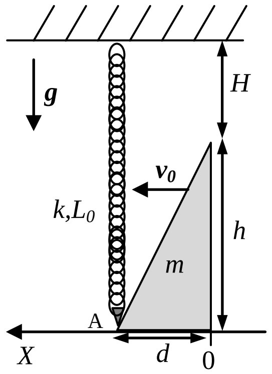
Corso di Laurea Ing. E-A – APPELLO STRAORDINARIO DI FISICA GENERALE – 1/4/2016

Nome e cognome: ……………………………………………………………… **Matricola: ……………**

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un blocco di massa m = 5.0 kg ha sezione con forma di triangolo rettangolo e cateti di lunghezza h = 40 cm (posto in direzione verticale) e d = 20 cm (posto in direzione orizzontale). Il blocco è vincolato a scorrere **con attrito trascurabile** su un piano orizzontale**.** Come mostrato in figura, su una delle superfici del blocco, quella che appare inclinata in sezione, spinge un puntale (puntiforme) montato all'estremità di una molla con costante elastica $k = 5.0\text{x}10^2$ N/m. L'altro estremo della molla è fissato a un solaio rigido e indeformabile. La molla e il puntale hanno entrambi **massa trascurabile**; inoltre la molla è guidata in modo che il suo asse si mantenga sempre in direzione verticale e non c'è attrito tra puntale e superficie del blocco; infine, la molla ha lunghezza di riposo $L_0 = h+H$, dove H = 20 cm è la distanza tra il punto più "in alto" del blocco e il solaio (vedi figura). All'istante $t_0 = 0$ il blocco si sta muovendo verso la sinistra della figura con velocità di modulo v_0 = 2.0 m/s, il puntale "tocca" il punto più basso del blocco (punto "A" di figura), e la molla si trova alla propria lunghezza di riposo. Evidentemente, con il movimento del blocco la molla viene compressa. [Trascurate ogni movimento del blocco di tipo non traslazionale, ad esempio ribaltamenti o altro]



   a) Si osserva che, a un dato istante t' , il blocco si arresta (istantaneamente). Quanto vale il suo spostamento Δx (rispetto alla posizione occupata all'istante iniziale)?

   Δx = ………………………………….. = ……… m $v_0\,(m/k)^{1/2}d/h$ = 0.10 m [a parte la geometria un po' complicata, l'esercizio propone un banalissimo problema di conservazione dell'energia meccanica. Infatti, non essendoci attriti si conserva l'energia meccanica, cioè è $0=\Delta E_K+\Delta U$, con $\Delta E_K = -(m/2)v_0^2$ (all'istante "finale" t' il blocco è fermo) e la variazione di energia potenziale è dovuta alla forza elastica: $\Delta U = (k/2)\Delta_{fin}^2 - (k/2)\Delta_{in}^2$, dove con Δ indichiamo la compressione della molla. Poiché la lunghezza di riposo della molla coincide esattamente con la lunghezza che essa assume nell'istante "iniziale" del processo considerato, è $\Delta_{in}= 0$. Si trova quindi immediatamente $\Delta_{fin} = v_0(m/k)^{1/2}$. La piccola complicazione geometrica consiste nel legare Δ_{fin} con lo spostamento Δx . Facendo un disegnino, si vede subito che Δ_{fin} è il cateto "verticale" di un triangolo rettangolo simile a quello rappresentato, in sezione, dal blocco, il cui cateto "orizzontale" è proprio Δx . Per le relazioni di similitudine dei triangoli, deve essere $\Delta x = \Delta_{fin}\, d/h$, da cui la risposta. Osservate che $\Delta x < d$, il puntale è ancora in contatto con la superficie del blocco quando questo si arresta istantaneamente]

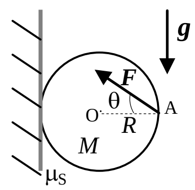
   b) Quanto vale l'accelerazione a_X' del blocco nell'istante t' in cui esso si arresta? [Ovviamente il blocco può muoversi solo in direzione orizzontale, e dovete calcolare l'accelerazione in tale direzione]

   a_X' = ……………………………….= ……… m/s^2 $-v_0\,(k/m)^{1/2}h/d$ = -40 m/s^2 [il puntale è a contatto con la superficie (inclinata) del blocco e, nell'istante considerato (in cui è fermo), si trova in equilibrio. La superficie (inclinata) del blocco produce una reazione vincolare ***N*** , ortogonale alla superficie stessa e diretta verso l'"alto" della figura, che determina questo equilibrio. Dunque la componente verticale di ***N*** deve uguagliare la forza elastica che, in modulo, vale $k\Delta_{fin} = k\, v_0(m/k)^{1/2}$. Per l'equilibrio del puntale deve quindi essere $N\cos\theta = k\, v_0(m/k)^{1/2}$, dove con θ abbiamo indicato l'angolo tra la superficie del blocco e l'orizzontale (il solito angolo che usiamo quando abbiamo a che fare con un piano inclinato!). si ha dunque $N = k\, v_0(m/k)^{1/2}/\cos\theta$. Ora, per il "terzo principio" della dinamica, il puntale deve esercitare sulla superficie del blocco una forza uguale e opposta a ***N*** . Questa forza avrà una componente orizzontale $N\sin\theta$ che dà luogo all'accelerazione del blocco, ovviamente diretta verso la destra della figura (per questo motivo nella soluzione si usa un segno negativo, vista l'orientazione del riferimento di figura). Alla fine si ha $ma'_X = = k\, v_0(m/k)^{1/2} \sin\theta/\cos\theta$, da cui la soluzione, dove abbiamo notato che $tg\theta = h/d$ e abbiamo fatto un minimo di manipolazioni algebriche]

   c) Quanto vale l'istante t' ? [Cercate di spiegare questa risposta meglio che potete, scrivendo in brutta tutti i passaggi e le considerazioni necessarie]

   t' = …………………………………… ~ ……… s $(\pi/2)(md/(kh))^{1/2}$ ~ 0.11 s   [le considerazioni che abbiamo svolto per le risposte ai quesiti precedenti possono aiutarci per scrivere l'equazione del moto, cioè la $a_X(x)$, del blocco. Infatti è evidente che la forza responsabile dell'accelerazione, come abbiamo appena determinato, è legata alla compressione della molla, che, a sua volta, dipende linearmente dalla posizione x del blocco. Per chiarire le idee, usiamo il riferimento di figura, e indichiamo la posizione (generica) del blocco con la coordinata (generica) x del suo "vertice destro" (rispetto alla figura), che inizialmente si trova in $x = 0$. Per una posizione x generica, la molla si trova compressa per un tratto $\Delta = xh/d$ (si ottiene facilmente ragionando sulla similitudine dei triangoli). Allora l'espressione della accelerazione in funzione di x , costruita ragionando come sopra, è $a_X(x) = -(k/m)(h/d)x$, dove il segno negativo tiene conto delle considerazioni svolte per la soluzione del quesito precedente. Quella ottenuta è l'equazione di un moto armonico con pulsazione $\omega = (kh/(md))^{1/2}$. La posizione occupata inizialmente dal blocco, che conduce a una lunghezza della molla pari a quella di riposo (dunque accelerazione e forza nulle), è la posizione di equilibrio di questo moto armonico. La posizione finale è quella "estrema", cioè più lontana (in modulo) rispetto a quella di equilibrio, ovvero ancora la posizione in cui il moto inverte il suo segno. In un oscillatore armonico, lo spostamento considerato corrisponde, come sapreste sicuramente dimostrare, a $T/4$, con $T = 2\pi/\omega$ periodo del moto. Da qui la risposta]

2. Un cilindro omogeneo di massa M = 1.0 kg e raggio R = 80 cm è sottoposto a una forza esterna ***F*** che agisce sulla sua superficie laterale, essendo applicata nel punto "A" di figura e avendo una direzione che forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Il cilindro è poi a contatto con una parete verticale scabra, con coefficiente di attrito statico μ_S = 0.80. Nella configurazione considerata, il modulo della forza esterna vale F_{EQ} (incognito) e il cilindro si trova in equilibrio. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, con $\sqrt{3}$ ~ 1.73 e $\sin(\pi/6)$ = ½]



   a) Quanto valgono, nelle condizioni di equilibrio considerate, il modulo della forza di attrito $F_{A,EQ}$ esercitata al contatto tra cilindro e parete e il modulo della forza esterna F_{EQ} ?

   $F_{A,EQ}$ = ………………………………….. = ……… N $Mg/2$= 4.9 N [il cilindro è un corpo rigido esteso non vincolato, per cui la condizione di equilibrio deve riguardare sia il moto rotazionale che quello traslazionale. Cominciamo proprio con il moto rotazionale, la cui equazione recita $\alpha = \Sigma\tau/I$, dove la somma si fa sulle componenti assiali delle forze che fanno momento rispetto al polo considerato e ***I*** è il momento di inerzia. All'equilibrio la somma delle componenti assiali dei momenti delle forze deve dunque fare zero. Le forze che agiscono sul cilindro sono ***F***, la forza peso, verticale, diretta verso il basso e applicata al centro di massa (che, nella sezione disegnata, coincide con il punto "O" collocato sull'asse del cilindro), la reazione vincolare ***N*** esercitata dalla parete sul cilindro, che ha evidentemente direzione orizzontale, verso la destra di figura, ed è applicata al punto di contatto (per la sezione considerata nel disegno) e l'eventuale forza di attrito $\boldsymbol{F_A}$, anch'essa necessariamente applicata al punto di contatto. Scegliamo come polo il punto "O" : rispetto a questo polo, forza peso e reazione vincolare non hanno braccio, per cui il loro momento è nullo. La forza ***F*** ha invece un braccio diverso da zero, che, da semplici considerazioni di trigonometria, ha lunghezza $R\sin\theta$; il momento di questa forza tende a far ruotare in senso antiorario il cilindro. Pertanto deve esistere un'altra forza che abbia momento non nullo e che tenda a far ruotare il cilindro in senso orario, altrimenti non potrebbe esserci equilibrio. Questa forza è la forza di attrito (statico, ovviamente, essendo all'equilibrio) che ha la stessa direzione del moto incipiente del punto di contatto tra cilindro e parete. Questo punto, se non ci fosse attrito, tenderebbe a muoversi verso il basso, per cui la forza di attrito deve essere verticale e puntare verso l'alto. Poiché il braccio della forza di attrito è R , deve essere, uguagliando i moduli dei momenti, $F_{A,EQ}\ R = F_{EQ} \sin\theta R$. Anche se non esplicitamente richiesto, è gradito, e anche necessario, verificare che la condizione di equilibrio proposta sia compatibile con il valore del coefficiente di attrito statico. Deve infatti essere $F_{A,EQ} \le \mu_S N$, con $N = F_{EQ} \cos\theta$. La disuguaglianza implica $\mu_S \ge tg\theta$, che è effettivamente verificata per i dati numerici delle grandezze in gioco. Dunque l'equilibrio (rotazionale) è possibile. A questo punto dobbiamo considerare l'equilibrio traslazionale (ovviamente lungo la direzione verticale, per quella orizzontale provvede il vincolo rappresentato dalla parete). La forza peso è l'unica forza diretta verso il basso. Essa deve uguagliare, in modulo, la forza di attrito, che abbiamo dimostrato essere diretta verso l'alto, e la componente verticale della forza $\boldsymbol{F}$. Dunque deve essere $Mg = F_{A,EQ} + F_{EQ} \sin\theta$. Mettendo a sistema questa equazione e la precedente, trovata per l'equilibrio rotazionale, si ottiene la soluzione]cegliendo un asse verticale diretto verso il basso, si ha che la forza peso,]

F_{EQ} = ………………………..……………… = ……… N $2F_{A,EQ} = Mg = 9.8$ N [vedi sopra]

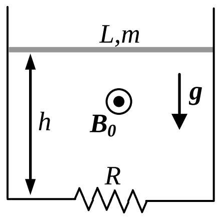
b) Immaginate ora che, improvvisamente e magicamente, il modulo della forza $\boldsymbol{F}$ diventi $F' = 2F_{EQ}$, con F_{EQ} determinato nella risposta al quesito precedente, e che questa forza rimanga **uniforme e costantemente** applicata al punto "A". In queste condizioni il cilindro non è più in equilibrio e si muove. Supponendo moto di **rotolamento puro**, quanto vale la variazione di quota Δh del centro di massa del cilindro quando questo è ruotato per un quarto di giro?

Δh = ………………………………….. = …….. m $\pi R/2 = 1.3$ m [poiché il moto è dichiaratamente di rotolamento puro, il centro di massa si sposta, evidentemente verso l'alto (il modulo della forza è maggiore rispetto a quello all'equilibrio e la forza ha una componente che punta verso l'alto), di un tratto $\Delta s_{CM} = R\ \Delta\phi$, con $\Delta\phi = \pi/2$ (il quarto di giro)]

c) E quanto vale la velocità angolare ω' del cilindro nell'istante in cui esso ha compiuto, nelle condizioni appena descritte, il quarto di giro? [Attente/i alla geometria e alla presenza di $\boldsymbol{F}$!]

ω' = ……………………………………. ~ …….. rad/s $\{(4/3)(g/R)[2(\cos\theta + (1+\ \pi/2)\ \sin\theta) - \ \pi/2]\}^{1/2}$ ~ 6.7 rad/s [poiché il moto è dichiaratamente di rotolamento puro, la forza di attrito, statico, non compie lavoro e si può usare convenientemente il bilancio energetico: $L_F = \Delta E_K + \Delta U_G$, con $\Delta U_G = Mg\Delta h$ e $\Delta E_K = (M/2)v'^2_{CM} + (I/2)\omega'^2 = 3MR^2\omega'^2/4$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato la relazione geometrica $v'_{CM} = R\omega'$ che vale nel caso del rotolamento puro e l'espressione del momento di inerzia $I = MR^2/2$ del cilindro pieno e omogeneo. Il lavoro L_F indicato al primo membro è quello della forza $\boldsymbol{F}$ (di modulo F'). Tenendo conto che essa è costante e uniforme, si ha $L_F = \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{s_A}$, dove il puntino indica un prodotto scalare e $\Delta \boldsymbol{s_A}$ è lo spostamento del punto di applicazione "A" della forza. Visto che il cilindro è ruotato di un quarto di giro, tale spostamento ha componente orizzontale pari a R . La componente verticale è invece pari allo spostamento del centro di massa, Δh , sommato a R (l'esortazione a fare attenzione alla geometria a questo si riferiva: provate a fare un disegnino per rendervene conto!). Tenendo conto che le componenti orizzontale e verticale della forza si ottengono moltiplicando il suo modulo rispettivamente per $\cos\theta$ e $\sin\theta$, si ha $L_F = F'R(\cos\theta + (1+\pi/2)\sin\theta)$. Mettendo tutto assieme, facendo un po' di matematica banale e usando l'espressione di $F' = 2F_{EQ}$ trovato prima si ottiene la soluzione, dall'aspetto immondo]

3. Una barretta di lunghezza L (nota) e massa m (nota), fatta di materiale ottimo conduttore, può scorrere con **attrito trascurabile** in direzione verticale mantenendosi in contatto elettrico con due guide ottime conduttrici, fisse, rigide e disposte verticalmente, collegate tra loro da un resistore di resistenza R (nota) come indicato in figura. Un campo magnetico esterno, uniforme e costante, insiste sulla regione di interesse. Tale campo magnetico ha modulo B_0 (noto), direzione ortogonale al foglio e verso uscente da esso (vedi figura). Inizialmente la sbarretta si trova ferma a una certa quota h e da qui viene lasciata scendere con velocità iniziale nulla. [Indicate con g il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Per effetto del moto di discesa della barretta, nel circuito costituito da barretta, conduttori verticali, resistore, viene indotta una corrente. Discutete **per bene**, in brutta, che verso ha tale corrente e spiegate perché. [Non basta invocare la "regola della mano destra"!]

Discussione: …………………………… La corrente fluisce in senso antiorario rispetto alla figura, e la risposta può essere determinata in due modi equivalenti. Si può infatti fare uso della forza di Lorentz che, mettendo in movimento le cariche elettriche (positive, la corrente si suppone fatta di cariche positive!) trascinate verso il basso all'interno della sbarretta ed essendo determinata in verso dalla regola della mano destra, indica che sulla barretta ci deve essere un movimento di cariche verso la sinistra della figura, che corrisponde a dire che c'è una corrente che fluisce in verso antiorario. In alternativa si può fare riferimento alla legge di Lenz (o Faraday-Lenz, o equazione di Maxwell in forma integrale per la circuitazione del campo elettrico). Questa "legge" afferma che il sistema reagisce alle perturbazioni creando un campo magnetico indotto la cui variazione di flusso si oppone alla variazione di flusso del campo magnetico esterno. Attribuendo come positivo il segno del flusso del campo magnetico esterno attraverso la superficie della spira, si ha che tale flusso diminuisce a causa della riduzione dell'area operata dalla discesa della barretta. Il campo magnetico indotto deve allora avere **lo stesso verso** del campo magnetico esterno, in modo da compensarne la riduzione del flusso. Per la regola della mano destra in versione "ciao ciao", la corrente che crea tale campo indotto deve avere verso antiorario, come già anticipato

b) Sapendo che, a un istante generico, la barretta ha velocità v generica, come si scrive la funzione di v (e di altri dati noti del problema) che esprime l'intensità di corrente $I(v)$ che scorre nel circuito?

$I(v)$ = …………………………………… B_0Lv/R [anche qui si possono seguire due strade, quella microscopica attraverso la forza di Lorentz, che si lascia per esercizio, e quella attraverso Faraday, che usiamo qui. La forza elettromotrice (la circuitazione del campo elettrico sulla spira, ovvero la differenza di potenziale ai capi della barretta) è data da $fem = -d\Phi(\boldsymbol{B_0})/dt$, dove il flusso del campo magnetico esterno è calcolato attraverso l'area della spira. Poiché il campo è uniforme e diretto ortogonalmente all'area della spira, si ha $\Phi(\boldsymbol{B_0}) = B_0 A$, con $A = Ly$ area della spira. La coordinata y indica l'"altezza" della barretta (l'altezza del rettangolo di base L che costituisce l'area della spira). Derivando rispetto al tempo e notando che $dy/dt = v$, velocità della barretta, si ha la risposta]

c) Come si scrive l'accelerazione $a(v)$, ovvero l'equazione del moto, della barretta? [Usate un riferimento verticale orientato verso il basso; l'espressione ottenuta dovrebbe risultare una funzione di v e degli altri dati noti del problema]

$a(v)$ = ... $g-((B_0L)^2/(mR))v$ [la barretta è percorsa da una corrente I non costante (dipende da v!); a causa della presenza del campo magnetico esterno $\boldsymbol{B_0}$ si determina una forza su tale corrente, che quindi si trasferisce alla barretta influenzandone il moto. Su un elementino $\boldsymbol{dl}$ di lunghezza della barretta, orientato come la corrente (dunque verso la sinistra di figura), la forza si esprime come $\boldsymbol{dF} = I\ \boldsymbol{dl} \times \boldsymbol{B_0}$. La regola della mano destra stabilisce che tale forza è diretta verticalmente verso l'alto, dunque in direzione opposta al moto. Il valore di tale forza può essere ottenuto integrando l'espressione precedente sulla barretta. Dato che il campo magnetico è uniforme ed uniforme si suppone anche l'intensità di corrente nella barretta, l'integrazione fornisce, in modulo, $F = B_0 IL = ((B_0L)^2/R)v$, dove abbiamo usato l'espressione di $I(v)$ trovata in precedenza. Da qui la soluzione, in cui il segno negativo è coerente con la scelta del riferimento e, ovviamente, compare anche l'accelerazione costante $\boldsymbol{g}$, che certamente agirà sulla barretta (presa in segno positivo per la scelta del riferimento)]