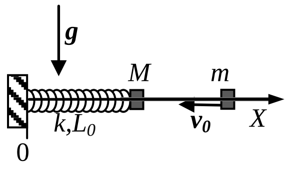
Corso di Laurea Ing. E-A – ESAME DI FISICA GENERALE – 10/1/2017

Nome e cognome: ……………………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un manicotto (puntiforme!) di massa M = 0.40 kg può scorrere **con attrito trascurabile** essendo infilato in una guida rigida e fissa (un tondino di acciaio) disposta lungo la direzione orizzontale. Il manicotto è vincolato a una molla di massa trascurabile, costante elastica k = 0.50 N/m e lunghezza di riposo L_0 = 0.50 m, il cui altro estremo è inchiodato a un muretto (vedi figura), in corrispondenza dell'origine di un asse X orizzontale orientato verso la destra di figura. Inizialmente il manicotto si trova fermo alla sua posizione di equilibrio; all'istante t_0 = 0 esso viene urtato da un altro manicotto, di massa $m = M/4$ = 0.10 kg , che lo colpisce provenendo dalla destra di figura con una velocità di modulo v_0 = 1.0 m/s. Dopo l'urto i due manicotti restano attaccati l'un l'altro (l'urto è quindi **anelastico**).

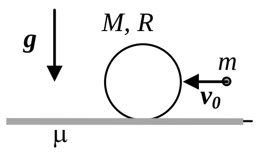


   a) Quanto vale la velocità V' con cui il sistema costituito dai due manicotti **comincia** a muoversi?
   V' = ……………………………… = …… m/s $-v_0/5$ = -0.20 m/s [la velocità richiesta è quella che il sistema possiede **subito dopo** l'urto, quando cioè la molla non ha ancora avuto tempo di modificare la propria lunghezza. La forza che essa esercita in "reazione" all'arrivo del manicotto non ha carattere impulsivo, per cui la presenza della forza elastica nel breve periodo dell'urto non è in grado di modificare la quantità di moto totale del sistema, che quindi si conserva. Inoltre nella direzione orizzontale non agiscono altre forze esterne.. Di conseguenza si conserva la quantità di moto totale del sistema lungo tale direzione, per cui, tenendo conto dell'orientazione dell'asse e della velocità iniziale (diretta nel verso negativo), e del fatto che l'urto è anelastico, si può scrivere $-mv_0 = (m+M)V' = 5mV'$ (nell'ultimo passaggio si è usata la relazione tra le masse data nel testo). Da qui la soluzione, in cui il segno negativo esprime la circostanza che il sistema si sposta verso la sinistra di figura (segno negativo dell'asse)]

   b) Nell'evoluzione successiva del moto, si osserva che, a un dato istante, il sistema costituito dai due manicotti si arresta (una prima volta, e istantaneamente) nella posizione X_{MIN} . Quanto vale X_{MIN} ? [Dovete usare il riferimento dato in figura]
   X_{MIN} = ……………………………… = …… m $L_0-(m/(5k))^{1/2}v_0$ = 0.30 m [possiamo usare la conservazione dell'energia meccanica, valida poiché si suppongono assenti lavori di forze dissipative (l'attrito è trascurabile). Deve allora essere $0 = \Delta E_k + \Delta U$, dove si intende che l'istante (o configurazione) "finale" è quello in cui il sistema si arresta istantaneamente e quella iniziale corrisponde alla posizione di equilibrio iniziale del manicotto di massa M . Osserviamo che, vista la configurazione orizzontale e l'assenza di altre forze in questa direzione a parte la forza elastica, tale posizione di equilibrio è quella in cui la molla si trova alla propria lunghezza di riposo, cioè, con ovvio significato dei simboli, $X_{eq} = L_0$. La variazione di energia cinetica è allora $\Delta E_k = -((m+M)/2)V'^2 = -(5/2)m(v_0/5)^2 = -(m/10)v_0^2$, dove si è fatto uso della relazione tra le masse e del risultato precedente. Nella variazione dell'energia potenziale va considerata la sola energia elastica "finale": infatti "inizialmente" la molla si trova alla propria lunghezza di riposo, e quindi ha un'energia elastica nulla. Dunque $\Delta U_{ELA} = U_{ELA,FIN} = (k/2)(X_{MIN}-L_0)^2$. Si ha quindi $(X_{MIN}-L_0)^2 = (m/(5k))v_0^2$. Questa equazione algebrica di secondo grado ha due soluzioni: $(X_{MIN}-L_0) = \pm (m/(5k))^{1/2} v_0$, ovvero a $X_{MIN} = L_0 \pm (m/(5k))^{1/2} v_0$. Queste due soluzioni corrispondono ai due punti di inversione del moto (armonico e periodico, vedi dopo) e la risposta al quesito corrisponde alla soluzione minore tra le due. Notate che alla stessa risposta si può giungere scrivendo la legge oraria del moto, come nel quesito successivo]

   c) Scrivete la legge oraria del moto $X(t)$ che descrive il movimento del sistema costituito dai due manicotti nelle condizioni specifiche considerate. [Dovete scrivere una funzione del tempo: **non** usate valori numerici ma riferitevi ai dati noti del problema usando i simboli dati nel testo; spiegate in brutta tutti i passaggi necessari!]
   $X(t)$ = …………………………………… $(v_0/(5\omega))\cos(\omega t)+L_0$, con $\omega = (k/(5m))^{1/2}$ [il primo passaggio necessario consiste nello stabilire che tipo di moto anima il sistema dei due manicotti. L'equazione del moto, scritta per una posizione generica X , recita $a = -(k/(m+M))(X-L_0)$, che rappresenta evidentemente un moto armonico di pulsazione $\omega = (k/(m+M))^{1/2} = (k/(5m))^{1/2}$. La soluzione generale del moto, cioè la legge oraria "generica", si scrive $X(t) = A\cos(\omega t + \phi) + X_{eq}$, e quella della velocità $v(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$. Le condizioni iniziali del moto sanciscono $X(t_0 = 0) = X_{eq} = A\cos\phi + X_{eq}$, da cui $A\cos\phi = 0$, ovvero, non potendo essere A = 0 (non ci sarebbe oscillazione!), esce $\phi = \pi/2$ (e valori ulteriori modulo π , ma prendiamo il primo). L'altra condizione iniziale recita $v(t_0 = 0) = V' = -v_0/5 = -\omega A\sin\phi = -\omega A$, dove abbiamo usato il risultato precedente e imposto $\phi = \pi/2$. Si ottiene quindi $A = v_0/(5\omega)$, da cui, tenendo anche conto che $X_{eq} = L_0$ e che $\sin(\xi+\pi/2) = \cos\xi$, la soluzione. Osservate che usando questa legge oraria del moto si ri-ottiene il risultato al quesito precedente. Infatti la posizione di equilibrio per il solo manicotto o il sistema dei due manicotti è sempre L_0 . Allora nella condizione di cui al quesito precedente si ha, in pratica, un'oscillazione dalla posizione di equilibrio a quella di inversione corrispondente alla minima coordinata. L'ampiezza dell'oscillazione è A , per cui lo spostamento corrispondente è pari ad A , cioè la coordinata X_{MIN} deve essere $X_{MIN} = L_0-A$, che porta proprio alla stessa soluzione]

2. Una ruota, costituita da un cilindro pieno e omogeneo di massa M = 0.40 kg e raggio R = 10 cm, si trova, inizialmente **ferma**, su un piano orizzontale scabro, che presenta un coefficiente di attrito μ = 0.20 (questo coefficiente vale sia per l'attrito statico che per quello dinamico). A un dato istante un proiettile puntiforme di massa $m = M/4$ = 0.10 kg colpisce il cilindro avendo una velocità di modulo v_0 = 2.0 m/s diretta orizzontalmente e orientata come in figura. La collisione avviene "a metà altezza" della ruota (vedi figura) e può essere considerata completamente **elastica**; dopo l'urto, si osserva che il proiettile conserva una velocità di direzione **orizzontale** e verso da determinare. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



   a) Determinate quali sono, **subito dopo l'urto,** i valori della velocità V_{CM} del centro di massa della ruota, della sua velocità angolare ω , della velocità v del proiettile. [Supponete che la forza di attrito tra ruota e piano scabro non abbia carattere impulsivo]
   V_{CM} = …………………………….. = ... m/s $(2/5)v_0$ = 0.80 m/s [nell'urto elastico si conservano quantità di moto ed energia cinetica totali del sistema. Infatti l'urto è elastico, e dunque si conserva l'energia cinetica totale, e il sistema è isolato lungo l'asse orizzontale, dato che l'unica forza esterna che potrebbe esserci, la forza di attrito, è dichiarata non impulsiva, e dunque non può modificare la quantità di moto totale nel breve intervallo temporale (subito prima e subito dopo l'urto) considerato. Inoltre, per lo stesso motivo, si conserva anche il momento angolare totale del sistema: calcolato rispetto al centro di massa del cilindro, esso è nullo sia prima dell'urto (il "braccio" della quantoità di moto del proiettile è nullo, vista la direzione della velocità $\boldsymbol{v_0}$) che dopo l'urto. Affinché quest'ultima affermazione sia verificata, il cilindro non deve avere rotazione subito dopo l'urto, cioè ω = 0. D'altra parte, per mettersi a ruotare, il cilindro avrebbe bisogno di una forza impulsiva con momento non nullo rispetto al centro di massa, e questa forza non c'è essendo non impulsiva la forza di attrito. In sostanza, il problema si riconduce all'urto tra due particelle puntiformi. Le conservazioni impongono: $(m/2)v_0^2 = (m/2)v^2+(M/2)V_{CM}^2$ e $mv_0 = mv+MV_{CM}$, dove v indica la componente (orizzontale) della velocità del proiettile subito dopo l'urto. Usando la relazione tra le masse data nel testo e semplificando opportunamente, queste espressioni possono essere riscritte come: $v_0^2=v^2+4V_{CM}^2$ e $v_0 = v+4V_{CM}$. Ricavando v dalla seconda e mettendolo nella prima si ottiene questa equazione algebrica di secondo grado: $v_0^2=v_0^2-8v_0V_{CM}+16V_{CM}^2+4V_{CM}^2$, ovvero, semplificando opportunamente: $0 = -2v_0V_{CM}+5V_{CM}^2$. Tale equazione ha due soluzioni distinte, una delle quali, quella che conduce a V_{CM} = 0, non è fisicamente rilevante (indicherebbe che l'urto non è avvenuto…). L'altra è quella riportata in risposta]
   ω = …………………………….. = ... rad/s 0 [vedi sopra!]
   v = …………………………….. = ... m/s $-(3/5)v_0$ = -1.2 m/s [anche questa risposta viene dalle considerazioni sopra esposte: notate che il segno negativo che si ottiene vuole dire che il proiettile "rimbalza all'indietro" (acquisendo una velocità che, in modulo, è una frazione di quella che aveva inizialmente)]

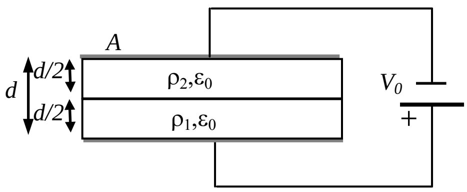
b) Nelle condizioni descritte, si osserva che il moto a cui è soggetta la ruota **subito dopo l'urto** non è di rotolamento puro. Discutete **per bene**, in brutta, i motivi che sono alla base di questa osservazione e chiarite in termini generali (ma fisicamente accettabili!) che tipo di moto compie la ruota negli istanti ulteriormente successivi.

Discussione: …………………………….. il rotolamento puro implica una precisa relazione, di origine geometrica, fra velocità di traslazione e velocità angolare: $V_{CM} = \omega R$. Questa relazione è evidentemente **non** verificata subito dopo l'urto, quando la velocità angolare è nulla e quella traslazionale è ben diversa da zero. Di conseguenza è sicuramente falso affermare che il moto è **sempre** di rotolamento puro. Tuttavia è evidente che, a partire dagli istanti successivi all'urto, la ruota comincerà a ruotare, essendo presente una forza di attrito che ha braccio non nullo rispetto al centro di massa, e che quindi crea un'accelerazione angolare. In una fase iniziale si ha che il moto implica strisciamento del punto di contatto tra ruota e piano scabro, per cui l'attrito ha natura dinamica. Questa forza di attrito rallenta il moto traslatorio, cioè fa diminuire V_{CM} (e, intanto, ω aumenta per via della citata accelerazione angolare) per cui ci sarà un istante in cui la condizione sulle velocità espressa sopra viene effettivamente verificata. A partire da questo istante il moto diventa di rotolamento puro, poiché l'attrito assume carattere statico e non c'è più alcun meccanismo in grado di "dissipare" energia (cioè di far diminuire l'energia cinetica del sistema). Di tutto questo verrà data ulteriore analisi nelle risposte ai quesiti seguenti.

c) Determinate l'istante di tempo t' tale che per $t > t'$ il moto della ruota è, invece, di rotolamento puro. [Misurate il tempo a partire dall'istante iniziale $t_0 = 0$ corrispondente all'urto]

t' = …………………………….. = ……. s $(2/15)v_0/(\mu g) = 0.14$ s [le equazioni del moto traslazionale del centro di massa e del moto rotazionale della ruota, scritte rispettivamente su un sistema di riferimento orizzontale orientato verso la sinistra di figura (la direzione del moto del centro di massa) e usando come polo il centro di massa, recitano: $a_{CM} = -F_A/M$ e $\alpha = F_A R/ I = 2F_A /(MR)$, dove abbiamo indicato con F_A la forza di attrito che si esercita al contatto tra ruota e piano scabro e notato che il braccio di questa forza (che è ovviamente orizzontale e diretta verso la destra di figura, da cui anche il segno negativo nell'equazione del moto traslazionale) è pari a R . Inoltre abbiamo fatto uso dell'espressione del momento di inerzia di un cilindro pieno e omogeneo, $I = MR^2/2$. Dato che, almeno inizialmente, il moto non è di rotolamento puro, la forza di attrito deve essere intesa come dinamica, per cui $F_A = \mu N = \mu Mg$. Quindi le due equazioni diventano rispettivamente $a_{CM} = -\mu g$ e $\alpha = 2\mu g / R$. Le due accelerazioni trovate sono costanti, per cui le leggi orarie delle velocità sono semplicemente $V_{CM}(t)= V_{CM} - \mu gt = (2/5)v_0 - \mu gt$ e $\omega(t)=2\mu gt / R$, dove abbiamo tenuto in debito conto della velocità iniziale diversa da zero per la traslazione del centro di massa, come determinato nella risposta precedente. Il moto diventa di rotolamento puro nell'istante t' tale che $V_{CM}(t')= \omega(t')R$, ovvero $(2/5)v_0 - \mu gt' = 2\mu gt'$, da cui la soluzione]

3. Un condensatore ad armature piane e parallele è formato da due dischi circolari sottili di materiale ottimo conduttore aventi area $A = 1.0\text{x}10^2$ cm^2 affacciati l'un l'altro a distanza d = 4.4 cm (i due dischi sono ovviamente concentrici). Lo spazio fra le due armature è riempito da due cilindri con base di area coincidente con quelle dei dischi e altezza $d' = d/2 = 2.2$ cm. I due cilindri sono fatti di due diversi materiali omogenei **debolmente conduttori**, con resistività rispettivamente $\rho_1 = 1.0\text{x}10^5$ ohm m e $\rho_2 = 4\rho_1 = 4.0\text{x}10^5$ ohm m (la costante dielettrica vale $\varepsilon_0 = 8.8\text{x}10^{-12}$ F/m per tutti e due i materiali). Le armature del condensatore sono collegate a un generatore ideale di differenza di potenziale $V_0 = 1.0\text{x}10^3$ V collegato come in figura (il polo positivo è sull'armatura "inferiore", che è a contatto con il materiale di resistività ρ_1). [Supponete che le dimensioni del sistema siano tali da **poter trascurare gli effetti ai bordi**, cioè che il campo elettrico sia nullo fuori dal condensatore e diretto come l'asse dei due cilindri, ovviamente coassiali tra loro, al suo interno]



Vista laterale

a) Spiegate per bene, in brutta, perché in condizioni stazionarie (di equilibrio) c'è una certa quantità di carica Q che si trova all'interfaccia tra i due materiali conduttori, cioè sulla superficie di separazione tra i due cilindri, e determinatene il valore.

Spiegazione: ………………………………… in condizioni stazionarie c'è una corrente che fluisce da un0armatura all'altra. Poiché all'interfaccia non ci sono né sorgenti né pozzi di carica elettrica, la carica coinvolta in questa corrente deve essere la stessa attraverso i due materiali. Inoltre, poiché la superficie (di base) dei due cilindri è la stessa, deve anche essere uguale la densità di corrente, cioè, in modulo, deve essere $j_1 = j_2$. A causa della relazione che esiste, nei materiali conduttori, tra $\boldsymbol{j}$ ed $\boldsymbol{E}$, questo vuol dire che i campi elettrici $\boldsymbol{E_1}$ ed $\boldsymbol{E_2}$ nei due materiali devono essere diversi. Nella geometria considerata, in cui si hanno campi omogenei all'interno dei due materiali, questo implica la presenza di un eccesso di carica elettrica all'interfaccia.

Q = ………………………………… = ……….. C $2V_0A\varepsilon_0 (\rho_2-\rho_1)/(d(\rho_1+\rho_2)) = 2.4\text{x}10^{-11}$ C [la condizione che riguarda la differenza di potenziale implica che $V_0 = \int \boldsymbol{E} \bullet d\boldsymbol{l} = E_1 d/2 + E_2 d/2$, dove abbiamo sfruttato direzione e verso dei campi elettrici nei due materiali, abbiamo notato che tali campi devono essere diversi tra loro secondo quanto già stabilito, e abbiamo ritenuto tali campi omogenei e uniformi all'interno dei due materiali, in accordo con la geometria considerata. A questo punto, avendo stabilito che i campi sono diversi nei due materiali, per trovare la carica che si deposita all'interfaccia occorre applicare Gauss, ad esempio su una scatola a forma di barattolo del tonno, con basi parallele alle due armature e grandi quanto queste e asse verticale, cioè diretto come l'asse dei due cilindri. Il flusso del campo elettrico che attraversa questa scatola è dovuto solo alle superfici di base, dato che, trascurando gli effetti ai bordi, i campi sono assiali, cioè verticali. Si ha $\Phi(\boldsymbol{E}) = A(E_2-E_1)$ (state attenti ai segni, che sono diversi essendo diverso il verso del versore uscente dalle due superfici di base). La carica contenuta in questa scatola è solo quella che si trova all'interfaccia, dato che i campi sono uniformi (nei due materiali), cioè è proprio la Q che si sta cercando. Tenendo conto che la continuità della densità di corrente implica $E_1/\rho_1 = E_2/\rho_2$ e unendo tutte le informazioni trovate, cioè mettendo a sistema le tre equazioni che ne vengono fuori, si ottiene la soluzione]

b) Quanto vale la potenza P erogata dal generatore di differenza di potenziale?

P =………………………………… = …….. W $V_0^2/((\rho_1+\rho_2)d/(2A)) = 0.91$ W [la potenza erogata dal generatore serve per "vincere" la resistenza offerta dal sistema al passaggio della corrente. Per l'effetto Joule, si ha $P = V_0^2/R$, con R resistenza complessiva del sistema. Questo può essere visto come la serie di due resistori (i due cilindri), per i quali si ha $R_i = \rho_i (d/2)/A$, con i = 1,2 . La resistenza complessiva è allora $R = (\rho_1 + \rho_2)d/(2A)$, da cui la soluzione]

c) Supponete ora che ad un certo istante il generatore venga scollegato; in queste condizioni si osserva che il condensatore "si scarica". Quanto vale la costante di tempo di scarica τ?

τ = ………………………………… = ……….. μs $\varepsilon_0(\rho_1+\rho_2)/2 = 2.2$ μs [il circuito è equivalente, come già notato, a un condensatore con in parallelo la serie delle due resistenze corrispondenti ai due pezzi di materiale. Il tempo di scarica è $\tau = RC$, con $C = \varepsilon_0 A/d$ (è un condensatore ad armature piane e parallele a prescindere dal materiale che c'è dentro) mentre $R = (\rho_1 + \rho_2)(d/2) /A$, come già determinato. Da qui esce la soluzione]