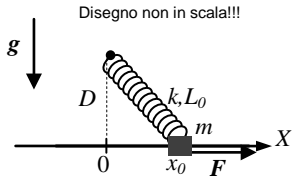


Nome e cognome:

Matricola:

Istruzioni: riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegare "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili. Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione

1. Un manicotto (puntiforme!) di massa $m = 1.0$ kg può scorrere con attrito trascurabile lungo una guida rigida e fissa (un tondino di acciaio) disposta in direzione orizzontale. Il manicotto è attaccato a una molla di massa trascurabile, costante elastica $k = 25$ N/m e lunghezza di riposo $L_0 = 1.0$ m il cui altro estremo è inchiodato a una parete verticale nella posizione indicata in figura (la distanza tra il chiodo e la guida è $D = 3L_0 = 3.0$ m); la figura mostra anche l'asse X che **dovete** usare come sistema di riferimento (orizzontale come la guida e centrato sulla "verticale" del chiodo). [Usate $g = 9.8$ m/s² per il modulo dell'accelerazione di gravità]



- a) Inizialmente il manicotto è sottoposto a una forza esterna di modulo $F = F_{eq}$ incognito, direzione orizzontale e verso come in figura, che lo mantiene in **equilibrio** nella posizione $x_0 = 4L_0 = 4.0$ m. Quanto vale il modulo della forza F_{eq} ?

$F_{eq} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ N $k4L_0/5 = 16kL_0/5 = 80$ N [per l'equilibrio è necessario che la sommatoria delle forze in direzione X sia nulla. Le forze presenti in questa direzione sono la forza esterna F e la componente orizzontale della forza elastica F_{EX} che hanno versi opposti e modulo uguale (come richiesto per l'equilibrio). Il modulo della componente orizzontale della forza elastica è, indicando con θ l'angolo compreso tra l'asse della molla e l'asse X , $|F_{EX}| = k|\Delta|\cos\theta$, dove $\Delta = L - L_0$, con $L = (D^2 + x_0^2)^{1/2} = (9L_0^2 + 16L_0^2)^{1/2} = 5L_0$ e $\cos\theta = x_0/L = 4/5$. Da qui la soluzione]

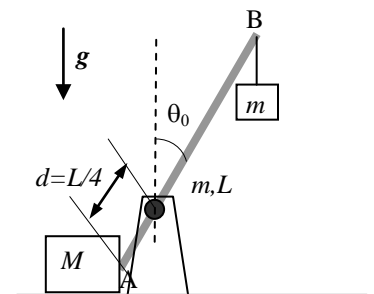
- b) Supponete che, a un dato istante, la forza esterna dimezzi improvvisamente il suo modulo rispetto al valore che consentiva l'equilibrio, cioè che diventi $F = F_{eq}/4$, con F_{eq} calcolato sopra; di conseguenza, il manicotto comincia a muoversi verso l'origine del riferimento, cioè la posizione $x = 0$. Quanto vale la velocità v' con cui esso passa per l'origine del riferimento? [Si intende che la forza F agisce sul manicotto durante l'intero processo mantenendosi costante in modulo, verso, direzione]

$v' = \dots\dots\dots$ m/s $(28(k/m)5L_0^2)^{1/2} \sim 12$ m/s [essendo l'attrito trascurabile, si può applicare il bilancio energetico: $L_F = \Delta E_K + \Delta U$. In questa espressione L_F rappresenta il lavoro della forza F che può essere facilmente calcolato come $L_F = -Fx_0 = -4L_0F_{eq}/4 = -16kL_0^2/5$. In questa espressione si noti il segno negativo, che tiene conto del fatto che forza e spostamento hanno versi evidentemente opposti tra loro. Poiché il manicotto parte da fermo, $\Delta E_K = (m/2)v'^2$. Inoltre l'unica altra forza (conservativa) che fa lavoro è la forza elastica; dunque $\Delta U = \Delta U_{ELA} = (k/2)\Delta_{fin}^2 - (k/2)\Delta_{in}^2$, dove Δ_{fin} e Δ_{in} sono rispettivamente gli allungamenti della molla quando l'anello è nella posizione $x=0$ ("finale") e x_0 ("iniziale"). Come già calcolato, $\Delta_{in} = 5L_0 - L_0 = 4L_0$, mentre $\Delta_{fin} = D - L_0 = 2L_0$. Quindi si ottiene $-16kL_0^2/5 = (m/2)v'^2 + (k/2)L_0^2(4-16)^2$, da cui la soluzione. NOTA: nel testo distribuito alla prova era erroneamente indicato il modulo della forza $F = F_{eq}/2$: nella correzione si tiene ovviamente conto dell'inconveniente!]

- c) Quanto vale, nell'istante di passaggio del manicotto per l'origine del riferimento, il modulo della reazione vincolare N che il tondino esercita sul manicotto?

$N = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ N $2kL_0 - mg = 40$ N [cominciamo con il notare che il manicotto si muove di moto rettilineo, per cui non deve essere considerata l'accelerazione centripeta. Di conseguenza, la reazione vincolare serve a impedire che il manicotto cada verso il basso, cioè essa deve bilanciare le forze che hanno componente verticale. Tali forze sono il peso, di modulo mg orientato verso il basso, e la forza elastica, che in quell'istante è tutta verticale e orientata verso l'alto, avendo modulo pari a $k\Delta_{fin} = 2kL_0$. Scegliendo un asse verticale rivolto verso il basso, deve quindi essere $0 = N - 2kL_0 + mg$, da cui la soluzione. Notate che il segno positivo così ottenuto significa che la reazione vincolare è orientata verso il basso]

2. Una sottile asta omogenea di massa $m = 17.3$ kg e lunghezza $L = 4.9$ m è imperniata in modo da poter ruotare con **attrito trascurabile** su un piano verticale attorno ad un perno passante per un punto che si trova a distanza $d = L/4$ da un suo estremo (estremo A), come rappresentato in figura. All'altro estremo dell'asta (estremo B) è attaccato, tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile, un *peso* che ha anch'esso massa $m = 10$ kg e che è libero di muoversi in direzione verticale. Volete fare in modo che l'asta (con il *peso* attaccato) stia in equilibrio formando un angolo $\theta_0 = \pi/6$ rispetto alla verticale. A questo scopo mettete l'estremo A a contatto con una cassa rigida di massa M incognita poggiata su un pavimento **scabro**, che presenta un coefficiente di attrito statico $\mu = 0.25$. La configurazione è tale che la cassa non si "ribalta" e rimane poggiata sul pavimento. [Usate il valore $g = 9.8$ m/s² per il modulo dell'accelerazione di gravità; ricordate che $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ e $\sin(\pi/6) = 1/2$, con $\sqrt{3} \sim 1.73$]



- a) Quanto vale il valore **minimo** M_{min} della massa della cassa che garantisce l'equilibrio nelle condizioni sopra descritte?

$M_{min} = \dots\dots\dots \sim \dots\dots\dots$ kg $16m/\sqrt{3} \sim 1.6 \times 10^2$ kg [se la cassa è ferma la forza di attrito statico F_A deve essere uguale in modulo alla forza che la cassa esercita sull'estremità dell'asta; l'equilibrio rotazionale dell'asta è garantito da questa forza (applicata al punto di contatto tra asta e cassa, cioè all'estremo A, e diretta verso la destra della figura), il cui momento rispetto al perno deve bilanciare il momento della forza peso dell'asta, applicata al suo centro di massa dell'asta e della forza peso del peso, applicata, tramite il filo, all'estremo B. Tenendo conto della geometria del problema si ha $0 = mg(L/4)\sin\theta_0 + mg(3L/4)\sin\theta_0 - F_A(L/4)\cos\theta_0 = mgL\sin\theta_0 - F_A(L/4)\cos\theta_0$, avendo scelto come positivo il verso di rotazione orario dell'asta attorno al perno. Si ha quindi: $F_A = 4mgtg\theta_0 = 4mg/\sqrt{3}$. Osservate che, per definizione di coefficiente di equilibrio statico, all'equilibrio deve essere $F_{A,MAX} = Mg\mu > F_A$. Al **minimo**, cioè come richiesto dal problema, deve essere $M = 4m/(\mu\sqrt{3})$ da cui la soluzione (dove si è notato che $1/0.25 = 4$)]

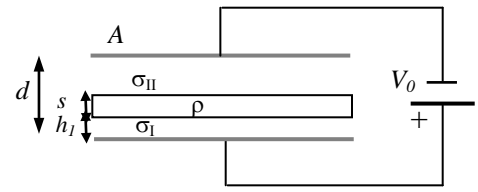
- b) Quanto vale il modulo F_P della forza che il perno esercita sull'asta in queste condizioni di equilibrio?

$F_P = \dots\dots\dots \sim \dots\dots\dots$ N $mg(4+16/3)^{1/2} \sim 5.2 \times 10^2$ N [il vincolo costituito dal perno serve a impedire il moto traslazionale dell'asta. Su di essa, oltre alla reazione vincolare che qui si vuole determinare, agiscono le seguenti forze: la forza al contatto tra cassa e estremo A dell'asta, che è in modulo pari alla forza di attrito F_A determinata sopra e ha direzione orizzontale; la forza peso, verticale e applicata al centro di massa; la tensione del filo, a sua volta pari al peso del *peso* (che è anche pari al peso dell'asta). Ricapitolando: in direzione orizzontale agisce la forza di modulo $F_A = 4mg/\sqrt{3}$; in direzione verticale la forza $2mg$. Queste forze, che devono essere bilanciate tra loro, sono mutuamente ortogonali, per cui il modulo richiesto si trova applicando il teorema di Pitagora, ovvero sommandole in quadratura come da soluzione]

- c) Supponete ora che, ad un dato istante, la cassa e il *peso* vengano improvvisamente rimossi: l'asta comincia quindi a ruotare attorno al perno con velocità angolare iniziale nulla. Quanto vale la velocità angolare ω di rotazione dell'asta nell'istante in cui essa si trova a passare per la posizione orizzontale (cioè quando l'angolo indicato in figura vale $\theta = \pi/2$)?

$\omega = \dots\dots\dots \sim \dots\dots\dots$ rad/s $((2mg(L/4)\cos\theta_0)/I)^{1/2} = ((24/7)(g/L)\cos\theta_0)^{1/2} \sim 2.4$ rad/s [dalla conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_K + \Delta U_g = (I/2)\omega^2 - mg(L/4)\cos\theta_0$, dove si è presa come variazione dell'energia potenziale gravitazionale quella dovuta alla variazione di quota del centro di massa dell'asta, che vale $\Delta z = -(L/4)\cos\theta_0$. Inoltre il momento di inerzia I , relativo alla rotazione dell'asta omogenea rispetto al polo considerato, si trova a partire dal momento di inerzia rispetto a un asse passante per il centro di massa, $I_{CM} = (m/12)L^2$, usando il teorema degli assi paralleli: $I = I_{CM} + m(L/4)^2 = (7/48)mL^2$, da cui la soluzione]

3. Due sottili lamine di materiale ottimo conduttore, spessore trascurabile ed area $A = 1.0 \text{ m}^2$ sono poste parallelamente l'un l'altra ad una distanza $d = 1.0 \text{ cm}$, formando un condensatore ad armature piane e parallele. Nello spazio (altrimenti vuoto) tra le lamine si trova una lastra conduttrice globalmente **neutra**, di area A identica a quella delle lamine e spessore $s = 2.0 \text{ mm}$. La configurazione è descritta schematicamente nella figura, da cui si vede che la lastra si trova ad una distanza $h_1 = 2.0 \text{ mm}$ dalla lamina "inferiore". Le due lamine sono collegate come in figura a un generatore ideale di differenza di potenziale $V_0 = 1.0 \times 10^4 \text{ V}$. [Usate il valore $\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ per la costante dielettrica del vuoto]



Disegno non in scala!!!

a) Quanto vale la capacità C del condensatore formato come descritto (dunque con al suo interno la lastra conduttrice)? [È **necessario** che spiegate **per bene**, in brutta, il procedimento adottato!]

$C = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ nF}$ $\epsilon_0 A/(d-s) = 1.1 \text{ nF}$ [per definizione, la capacità è pari al rapporto Q/V_0 , dove Q è la carica che si accumula su una delle armature del condensatore (per convenzione, si considera l'armatura collegata al polo positivo, cioè la lamina in basso in figura). A regime, cioè quando il condensatore si è caricato, tale carica produce un campo elettrico che, per la simmetria (piana) del problema, è uniforme e diretto ortogonalmente rispetto alla lamina. Sempre a regime, cioè in condizioni stazionarie, è ovvio che non c'è campo elettrico all'interno della lastra: infatti se qui si trovasse campo elettrico, le cariche contenute nel conduttore si muoverebbero, cioè non ci sarebbe equilibrio. In altre parole, la presenza della lastra crea una suddivisione dello spazio (volume) contenuto all'interno del condensatore in tre sottospazi: il volume tra lamina inferiore e bordo inferiore della lastra, in cui si troverà il campo elettrico E_I , il volume interno alla lastra (in cui il campo elettrico, che qui chiamiamo E_{lastra} , è nullo), il volume tra il bordo superiore della lastra e la lamina superiore, in cui si troverà il campo elettrico E_{II} . Applicando il teorema di Gauss a una scatola che ha due superfici di base ("tappi") parallele alle lamine e immerse rispettivamente nella regione I e II, si ottiene che il flusso del campo elettrico (complessivo) è nullo, poiché è nulla la carica contenuta all'interno della scatola (la lastra è neutra e la simmetria è piana). Inoltre, poiché i campi elettrici E_I ed E_{II} sono entrambi ortogonali a tali superfici di base, la circostanza che il flusso del campo elettrico è complessivamente nullo porta alla conseguenza che $E_I = E_{II}$. Ricordando che $\Delta V = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, con $d\mathbf{l}$ elemento di vettoriale di linea nel percorso che conduce dall'estremo di integrazione A all'estremo B, si ottiene, tenendo conto della direzione dei campi elettrici e usando un percorso di integrazione che va dalla lamina inferiore a quella superiore ed è orientato come l'asse del condensatore (dunque parallelo ai campi elettrici, qui chiamiamo questa direzione asse Z): $-V_0 = -\int_A^B E dz$. Notate che il segno negativo alla differenza di potenziale che compare al primo membro è dovuto al fatto che la lamina superiore, per come è realizzato il collegamento al generatore, si trova a potenziale inferiore rispetto alla lamina inferiore, per cui la differenza di potenziale tra gli estremi di integrazione deve avere un segno negativo. Ora l'integrale può spezzarsi in tre contributi, corrispondenti ai tre sotto-spazi definiti prima. Essendo il campo nella lastra nullo, il contributo corrispondente è pure nullo. Inoltre, essendo i campi E_I ed E_{II} uniformi nelle rispettive regioni, l'integrale è immediato, e risulta nel prodotto del modulo dei campi (che, ricordiamo, è lo stesso) per la lunghezza del percorso, che vale h_1 per il primo contributo e $d-s-h_1$ per l'ultimo contributo. Si ha quindi: $-V_0 = -\int_A^B E dz = -(E_I h_1 + E_{II} (d-s-h_1)) = -E_I (d-s)$, dove abbiamo usato la circostanza che i due campi hanno lo stesso modulo. A questo punto il campo E_I può essere facilmente legato alla carica Q che si trova sull'armatura (inferiore) del condensatore: infatti, applicando Gauss a una scatola come prima, ma che stavolta ha la superficie di base inferiore fuori dal condensatore, dove il campo è nullo, è quella superiore nella regione I, si ottiene facilmente $E_I A = Q/\epsilon_0$ (si è anche supposto che le superfici di base della scatola avessero la stessa area delle lamine, in modo che la scatola racchiudesse tutta la carica elettrica presente sull'armatura). Mettendo tutto assieme con la definizione di capacità si ottiene la soluzione. Un modo alternativo per giungere alla stessa conclusione si basa sulla circostanza che, di fatto, il condensatore considerato può essere visto come la serie di due condensatori ad armature piane e parallele, con il vuoto al loro interno (senza nessuna lastra!), di area pari ad A e separazione tra le armature corrispondente rispettivamente a h_1 e $(d-s-h_1)$. Infatti la lastra è complessivamente scarica, come complessivamente scariche sono le due armature "collegate tra loro" nella serie di due condensatori. Come si può facilmente dimostrare, usando la regola della capacità per la serie dei condensatori e l'espressione della capacità dei condensatori ad armature piane e parallele si ottiene effettivamente lo stesso risultato]

b) Quanto valgono, in condizioni stazionarie, la densità di carica di volume ρ all'interno della lastra conduttrice e le densità di carica superficiale σ_I e σ_{II} sulle sue due facce indicate in figura (rispettivamente quella inferiore e superiore, nel disegno)?

$\rho = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ C/m}^3$ 0 [come specificato nella risposta al quesito precedente, in condizioni stazionarie la lastra deve trovarsi in equilibrio: il campo elettrico al suo interno deve essere nullo, e la carica deve trovarsi tutta sulle superfici superiore e inferiore della lastra, per cui all'interno la densità è nulla]

$\sigma_I = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ C/m}^2$ $-CV_0/A = -1.1 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$

$\sigma_{II} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ C/m}^2$ $-\sigma_I = 1.1 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$ [alla risposta si giunge facilmente applicando, ancora!,

Gauss a una scatola fatta come specificato nella risposta al quesito precedente, e che ha, stavolta, una delle superfici di base nella lastra, dove il campo è nullo, e l'altra fuori dal condensatore, dove anche il campo è nullo. Il flusso complessivo attraverso tale scatola è quindi nullo, per cui deve essere nulla la carica complessiva all'interno della scatola. Tale carica si trova su una delle due armature, per esempio quella inferiore, dove sappiamo che essa vale $Q = CV_0$, e su una delle facce della lastra, per esempio su quella inferiore, dove vale $Q_I = \sigma_I A$. Poiché deve essere $Q + Q_I = 0$, si ottiene $Q_I = -Q$, da cui la risposta. Inoltre, dovendo essere la lastra complessivamente scarica, cioè neutra, deve anche essere $Q_{II} = \sigma_{II} A = -Q_I$, da cui il completamento della soluzione]