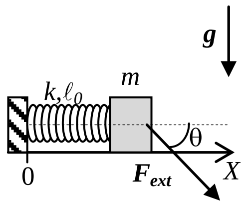
Corso di Laurea Ing. E-A – ESAME DI FISICA GENERALE STRAORD – 7/4/2017

Nome e cognome: ……………………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Un piccolo blocchettino di massa m = 100 g (da considerare come un oggetto puntiforme) può muoversi con **attrito trascurabile** su un piano **orizzontale**. Il blocchettino è agganciato ad una molla di massa trascurabile, lunghezza di riposo ℓ_0 = 50 cm e costante elastica k = 0.20 N/m, il cui altro estremo è vincolato ad un muretto verticale, rigido ed indeformabile, posto all'origine dell'asse X (si veda la figura). Inoltre, sul blocchettino agisce una forza esterna $\boldsymbol{F_{ext}}$ costante, diretta come in figura (l'angolo rispetto all'orizzontale vale $\theta = \pi/3$). In queste condizioni si osserva che il blocchettino si trova in equilibrio nella posizione x_0 = 80 cm. [Usate l'asse di riferimento X indicato in figura, con origine sul muretto; ricordate che $cos(\pi/3) = ½$ e $sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, con $\sqrt{3} \sim 1.73$]



   a) Quanto vale il modulo della forza esterna F_{ext}?

   F_{ext} = …………………………………… = ... N $(k/cos\theta)(x_0-\ell_0)$ = 0.12 N [affinché ci sia equilibrio occorre che forza elastica e componente orizzontale della forza esterna si bilancino, cioè deve essere $0 = -k(x_0-\ell_0)+ F_{ext} cos\theta$, da cui la soluzione]

   b) Supponete ora che, a un dato istante, la forza esterna diminuisca improvvisamente il suo modulo al valore $F' = F_{ext}/8$, con F_{ext} determinato sopra. In conseguenza di questo, il blocchetto comincia a muoversi, partendo da fermo, verso la sinistra di figura. Quanto vale la sua velocità v' nell'istante (detto t') in cui passa per la posizione $x' = \ell_0$? [In questo istante, la molla si trova alla propria lunghezza di riposo: si intende che la forza esterna rimane applicata, costante in modulo, direzione e verso, per l'intero processo considerato]

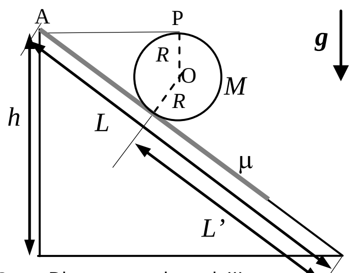
   v'= .... = ……… m/s $(x_0-\ell_0)(k/(2m))^{1/2}$ = 0.30 m/s [poiché le forze di attrito sono trascurabili, conviene impiegare il bilancio energetico nella forma $L_{F'} = \Delta E_k + \Delta U$. In questa espressione, $\Delta E_k = (m/2)v'^2$, dato che il blocchetto parte da fermo (era in equilibrio). La variazione di energia potenziale è poi dovuta unicamente alla forza elastica, e si può esprimere come $\Delta U= -(k/2)(x_0-\ell_0)^2$, dove si è tenuto in conto che, nella configurazione "finale", quando la molla è alla propria lunghezza di riposo, l'energia elastica è nulla e quindi l'unico contributo è quello dell'energia elastica iniziale. Infine, il lavoro della forza esterna, che rimane costante durante il processo, può essere espresso come prodotto tra spostamento del blocchettino e proiezione della forza lungo la direzione dello spostamento: $L_{F'} = -F'cos\theta(x_0-\ell_0)$, dove il segno negativo indica che forza e spostamento sono discordi in verso. Mettendo tutto assieme si ottiene $-F'cos\theta(x_0-\ell_0) = (m/2)v'^2 -(k/2)(x_0-\ell_0)^2$, ovvero, sostituendo $F' = F_{ext}/8 = (k/(8cos\theta))(x_0-\ell_0)$, $-(k/4)(x_0-\ell_0)^2 = (m/2)v'^2 -(k/2)(x_0-\ell_0)^2$, equazione in cui l'unica incognita è v' . Da qui la soluzione]

   c) Immaginate poi che, proprio all'istante t' di cui al punto precedente, la forza esterna venga definitivamente annullata. Come si scrive la legge oraria del moto, $x(t)$, per $t > t'$? [Dovete tenere in debito conto delle condizioni iniziali del problema; non usate valori numerici, ma impiegate i simboli]

   $x(t)$= .... $(v'/\omega)cos(\omega (t-t')+ \pi/2)+ \ell_0 =-(v'/\omega)sin(\omega (t-t'))+ \ell_0$, con $\omega = (k/m)^{1/2}$

   [il moto avviene sotto l'azione della sola forza elastica, per cui $a(x) = -(k/m) (x_0-\ell_0)$. Questa equazione dà luogo a un moto armonico, con pulsazione $\omega = (k/m)^{1/2}$. La legge oraria "generica" del moto è $x(t) = A\ cos(\omega(t-t')+\phi) + x_{eq}$, con $x_{eq} = \ell_0$ posizione di equilibrio e A e ϕ da determinare in funzione delle condizioni iniziali. Notate che nella legge oraria si è tenuto in debito conto del fatto che l'istante iniziale del moto considerato è t' (e non zero, come di solito). Le condizioni iniziali stabiliscono che la posizione è proprio quella di equilibrio, $x' = \ell_0$, e la velocità è la v' determinata al punto precedente. In altre parole, deve essere: $x(t') = x' = \ell_0 = A\ cos(\phi) + \ell_0$, ovvero $A\ cos(\phi) = 0$, e $v(t') = v' = \ell_0 = -A\ \omega\ sin(\phi)$, dove abbiamo fatto uso della legge oraria della velocità, $v(t) = -A\ \omega\ sin(\omega(t-t')+\phi)$. Una soluzione delle due equazioni conseguenti alle condizioni iniziali è $\phi = \pi/2$ e $A = v'/\omega$ (qui si è tenuto conto che la velocità v' è diretta nel verso negativo dell'asse di riferimento). Da qui la soluzione]

2. Un cilindro pieno e omogeneo di massa M = 6.0 kg e raggio R = 20 cm si trova su un piano inclinato di altezza h = 3.0 m e lunghezza $L = (5/3)h$ = 5.0 m. La superficie del piano è **scabra** e presenta un coefficiente di attrito μ = 0.50 (sia statico che dinamico). Al punto P del cilindro, che dista R dall'asse (cioè dal punto O di figura), è vincolato un estremo di una fune inestensibile di massa trascurabile, il cui altro estremo è inchiodato in un punto, denominato A, del piano inclinato, come in figura. Il tratto di fune che collega P ad A è orizzontale. Nella situazione rappresentata il cilindro si trova **fermo in equilibrio**. [Usate g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



Disegno non in scala!!!

   a) Quanto valgono, nelle condizioni descritte, i moduli T della tensione della fune e F_A della forza di attrito che si esercita al contatto tra cilindro e superficie del piano inclinato?

   T = …………………………………… = ………… N $Mg/3$ = 20 N [il cilindro è un corpo rigido esteso, dunque l'equilibrio deve riguardare sia la rotazione che la traslazione. Per esaminare la rotazione, scegliamo il polo nel punto O, asse del cilindro. Rispetto a questo polo fanno momento solo la tensione della fune $\boldsymbol{T}$ e la forza di attrito $\boldsymbol{F_A}$. I due momenti di queste forze devono essere di segno opposto, cioè devono tendere a provocare rotazioni di verso opposto. Poiché la tensione della fune farebbe ruotare il cilindro nel verso antiorario di figura, la forza di attrito deve tendere a far ruotare il cilindro in senso orario, per cui la forza di attrito (statico!) deve essere rivolta verso l'alto del piano inclinato. Inoltre si osserva come il braccio della forza di attrito sia pari a R . Il braccio della tensione della fune può essere facilmente determinato come la distanza tra O e la retta di applicazione della forza: si vede dal disegno che anche in questo caso esso è pari a R . Uguagliando i moduli dei due momenti delle forze si ottiene allora $F_AR = TR$, ovvero $F_A = T$. Esaminiamo ora l'equilibrio traslazionale, a cui contribuiscono tutte le forze che hanno una componente diretta come il piano inclinato (tensione della fune, forza peso, forza di attrito). Scegliendo un asse parallelo al piano e diretto verso il basso, proiettando le componenti delle forze si ottiene: $0 = Mg\sin\theta - F_A - T\cos\theta$. Usando la relazione appena trovata tra T e F_A si ottiene $T = Mg \sin\theta/(1+\cos\theta)$. Infine, la geometria del problema indica che $\sin\theta = h/L = (3/5)$ e $\cos\theta = (1-\sin^2\theta)^{1/2} = 4/5$, da cui la soluzione]

F_A = ... = ... N $T = Mg/3 = 20$ N [vedi sopra; notate che la forza di attrito esercitata al contatto tra cilindro e piano inclinato scabro ha un valore massimo $F_{AMAX} = \mu N = \mu(Mg\cos\theta + T\sin\theta)$, dove abbiamo determinato il modulo della reazione vincolare imponendo che essa bilanci le componenti delle forze applicate al cilindro di direzione ortogonale al piano. Tenendo conto dell'espressione delle grandezze trigonometriche e di quanto appena determinato, si ha $F_{AMAX} = \mu N = \mu Mg(\cos\theta + \sin\theta/3) = \mu Mg(4/5+1/5) = \mu Mg$; numericamente, questo valore è maggiore della F_A richiesta per l'equilibrio (che è $F_A = Mg/3$), per cui la condizione di equilibrio descritta nel testo può effettivamente essere raggiunta nella configurazione considerata]

b) A un dato istante la fune viene tagliata (senza impartire velocità iniziale al cilindro) e il cilindro si mette in movimento. Dimostrate **chiaramente e in modo quantitativo**, in brutta, che il moto è di rotolamento puro e determinate il modulo della forza di attrito F_A sviluppato al contatto tra piano inclinato e cilindro durante il movimento.

Dimostrazione: .... il cilindro prende a muoversi di traslazione (del centro di massa) e di rotazione (attorno al proprio asse) per effetto delle forze rimaste in gioco. Per la rotazione, l'unica forza che produce momento è la forza di attrito, sempre diretta verso l'alto del piano inclinato (deve opporsi al moto, o moto incipiente, del punto di contatto tra cilindro e piano inclinato che, se non ci fosse attrito, avverrebbe verso il basso del piano inclinato). L'equazione del moto rotazionale (attorno al polo O) è $\alpha = F_A R/I = F_A R/(MR^2/2) = 2F_A/(MR)$, dove abbiamo esplicitato il momento di inerzia del cilindro pieno e omogeneo per rotazioni attorno al suo asse. L'equazione del moto di traslazione del centro di massa si scrive invece, rispetto allo stesso asse usato prima, $a_{CM} = g\sin\theta - F_A/M$. In queste equazioni in generale F_A è incognita. Supponendo che il moto sia di rotolamento puro, deve valere la condizione $\alpha = a_{CM}/R$, che costituisce un'ulteriore equazione. Se questa equazione è valida, cioè se il moto è davvero di rotolamento puro, risolvendo per F_A si ottiene $F_A = Mg\sin\theta/3$. Dobbiamo ora chiederci se questo valore della forza di attrito è compatibile con le condizioni del problema ragionando come al punto precedente. Stavolta, però, $N = Mg\cos\theta$ (non c'è più la tensione della fune), per cui il valore massimo della forza di attrito è $\mu Mg\cos\theta$, ed è questo che deve risultare maggiore di $F_A = Mg\sin\theta/3$. In altre parole, occorre che sia verificata la disuguaglianza $\mu > tg\theta/3 = (3/4)/3 = ¼$. La relazione è verificata a quindi il moto di rotolamento puro (partendo da fermi) è possibile]

F_A = ... = ... N $Mg\sin\theta/3 = Mg/5 = 12$ N [vedi sopra]

c) Sapendo che il tratto di piano inclinato percorso dal cilindro ha lunghezza $L' = (3/5)L = 3.0$ m (vedi figura), quanto vale l'intervallo di tempo Δt necessario perché esso giunga alla base del piano inclinato?

Δt = ... ~ .... s $(2L'/a_{CM})^{1/2} = (2L'/(2g/3))^{1/2} = (3L'/g)^{1/2} = 3(L/(5g))^{1/2} \sim 0.96$ s [come appena dimostrato, il cilindro si muove di rotolamento puro con accelerazione del centro di massa costante e uniforme, $a_{CM} = 2F_A/M = 2g/3$. Considerando che tutto all'inizio è fermo e che non viene impartita velocità iniziale, la legge oraria del moto di traslazione del centro di massa stabilisce semplicemente che $L' = (a_{CM}/2)\Delta t^2$, da cui la soluzione]

3. Avete un condensatore le cui armature sono costituite da due dischi sottili di materiale perfettamente conduttore (raggio dei dischi $R = 10$ cm) posti parallelamente e coassialmente uno di fronte all'altro a una distanza $d = 1.0\text{x}10^{-4}$ m (lo spazio tra le armature è vuoto). Le armature sono connesse a un generatore di differenza di potenziale **variabile** nel tempo, tale che in un intervallo di tempo $\Delta t = 10$ s la differenza di potenziale passa da zero al valore $V_0 = 50$ V seguendo una funzione **lineare** del tempo. [Usate i valori $\varepsilon_0 = 8.8\text{x}10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto]

a) Come si esprime, in funzione del tempo t , il modulo del campo elettrico $E(t)$ all'interno del condensatore nell'intervallo $0<t<\Delta t$? [Date una risposta solo letterale usando le espressioni simboliche dei parametri noti del problema]

$E(t)$ = ... $V(t)/d = V_0 t/(d\Delta t)$ [in un condensatore ad armature piane e parallele sottoposto a una d.d.p. ΔV il campo elettrico ha ampiezza (modulo) $\Delta V/d$, come si può facilmente dimostrare ricordando che il campo è omogeneo e diretto ortogonalmente alle armature e usando la relazione tra d.d.p. e campo elettrico. Nel caso proposto dal problema la d.d.p. è una funzione del tempo $V(t)$. Essa si ricava in modo molto semplice dalla descrizione riportata nel testo, che permette di scrivere: $V(t) = V_0 t/\Delta t$. Da qui la risposta]

b) Quanto vale il lavoro L fatto dal generatore nell'intervallo Δt?

L = ... = ... J $\varepsilon_0\pi R^2 V_0^2/(2d) = 3.45\text{x}10^{-6}$ J [il lavoro del generatore serve per caricare il condensatore, inizialmente scarico, al punto che la differenza di potenziale tra le armature diventi V_0. Dunque la variazione di energia elettrostatica, ovvero il lavoro del generatore, vale $CV_0^2/2$, con $C = \varepsilon_0 S/d$ $(S=\pi R^2)$, capacità del condensatore ad armature piane e parallele]

c) Come si esprime in funzione del tempo t l'intensità di corrente $I(t)$ prodotta dal generatore nell'intervallo $0<t<\Delta t$? [Anche qui date una risposta solo letterale]

$I(t)$ = ... $dQ(t)/dt = C\, dV(t)/dt = (\varepsilon_0\pi R^2/d) V_0/\Delta t$ [la corrente fluisce sulle armature del condensatore per caricarle, per cui essa deve poter essere espressa come "derivata temporale" della carica. Inoltre, istante per istante deve essere $Q(t) = CV(t)$, da cui la risposta]