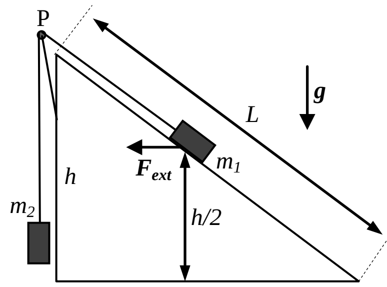
Corso di Laurea Ing. E-A – ESAME DI FISICA GENERALE – 27/6/2017

Nome e cognome: …………………………………………………………… **Matricola: ……………**

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Una cassa di massa $m_1 = 3m = 9.0$ kg si trova su un piano inclinato liscio (**attrito trascurabile**), di altezza $h = 4.0$ m e lunghezza $L = 5h/4 = 5.0$ m. Alla cassa è attaccato l'estremo di una fune inestensibile e di massa trascurabile al cui altro estremo si trova un *peso* di massa $m_2 = m = 3.0$ kg, libero di muoversi in direzione verticale. La fune, dopo un tratto in cui si trova parallela al piano inclinato, può scorrere con **attrito trascurabile** attorno a un perno (indicato con P in figura) montato sulla sommità del piano inclinato stesso. Sulla cassa di massa m_1 agisce una forza esterna $\boldsymbol{F}_{ext}$ di modulo incognito, direzione orizzontale e verso come in figura: in queste condizioni si osserva che il sistema (*peso* e cassa) è in **equilibrio**. [Usate $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e considerate cassa e peso come oggetti puntiformi]



   a) Quanto vale, in queste condizioni di equilibrio, il modulo della forza esterna F_{ext} ?

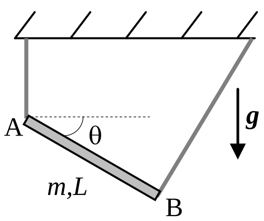
   F_{ext} = …………………………………… = ……… N $g(m_1 sin\theta - m_2)/cos\theta = mg(12/5 - 1)(5/3) = 7mg/3 = 69$ N

[all'equilibrio sia il peso che la cassa hanno accelerazione nulla. Poiché il moto della cassa è vincolato al piano inclinato, l'accelerazione della cassa deve essere considerata nella sola direzione del piano inclinato, per cui per descrivere la sua dinamica usiamo un asse parallelo al piano orientato, ad esempio, verso il basso. In questo sistema l'accelerazione si scrive: $a_1 = gsin\theta - T/m_1 - (F_{ext}/m_1)cos\theta$, dove con θ si indica l'angolo tra piano inclinato e orizzontale. Notate che in questa equazione del moto abbiamo considerato le componenti delle forze lungo la direzione rilevante, e chiamato T il modulo della tensione della fune. Per il peso possiamo usare un asse verticale diretto verso l'alto. In questo riferimento si ha $a_2 = - g + T/m_2$, dove abbiamo usato la circostanza che il modulo della tensione della fune è lo stesso ai suoi estremi. All'equilibrio le due accelerazioni sono nulle, e le due equazioni formano un sistema le cui incognite sono T e F_{ext} . Per la soluzione occorre poi osservare che, per semplici ragioni geometriche, l'angolo θ tra piano inclinato e orizzontale è tale che $sin\theta = h/L = 4/5$, $cos\theta = (1 - sin^2\theta)^{1/2} = 3/5$, $tg\theta = 4/3$. La risposta si trova risolvendo il sistema]

   b) Supponete che a un dato istante il modulo della forza F_{ext} venga dimezzato, cioè diventi $F'_{ext} = F_{ext}/2$, con F_{ext} determinato sopra. In seguito a tale magia si osserva che la cassa, in precedenza ferma, prende a muoversi verso il basso del piano inclinato e il *peso* verso l'alto. Sapendo che inizialmente la cassa (da considerare puntiforme!) si trovava a mezza altezza sul piano inclinato, come indicato in figura, determinate la velocità v' con cui essa giunge alla base del piano inclinato. [Si intende che la forza $\boldsymbol{F'}_{ext}$ rimane costantemente e uniformemente applicata alla cassa durante l'intera discesa]

   v' = …………………………………… ~ ……… m/s $(7gh/32)^{1/2} \sim 2.9$ m/s [ci sono due diverse strade per giungere alla soluzione. La prima, che qui non viene sviluppata esplicitamente, si basa sulla scrittura delle equazioni del moto e sulla soluzione del sistema imponendo $a_1 = a_2$. L'accelerazione trovata, che è in modulo la stessa per i due oggetti, è costante e uniforme, e quindi, scrivendo la legge oraria del moto, è possibile conoscere il tempo necessario perché la cassa giunga alla base del piano inclinato, e da qui, usando la legge oraria della velocità, dedurre la velocità alla base del piano inclinato. L'altra strada, più elegante ed efficiente, si basa sul "bilancio energetico" : $L_{F'} = \Delta E_K + \Delta U_G$. Qui $\Delta E_K = (m_1/2)v_1^2 + (m_2/2)v_2^2 = 2mv'^2$, dove abbiamo notato che i due oggetti, essendo collegati da una fune inestensibile, si muovono con la stessa velocità, e abbiamo usato la relazione tra le masse data nel testo. Per il calcolo della variazione di energia potenziale, dovuta alla forza peso e quindi alla variazione di quota dei due oggetti, occorre notare che la cassa scende per un tratto $h/2$ mentre il peso sale per un tratto pari alla lunghezza dell'ipotenusa del triangolo rettangolo di cateto pari a $h/2$: tale lunghezza è pari a $(h/2)/sin\theta = 5h/8$, dove abbiamo usato il valore del seno trovato prima. Osservate che, come è ovvio, tale lunghezza è anche pari a mezzo L . Dunque $\Delta U_G = -m_1gh/2 + m_2g(5h/8) = mgh(-3/2+5/8) = -7mgh/8$. Infine, poiché la forza esterna è costante e uniforme, il lavoro L_F si ottiene semplicemente dalla moltiplicazione del modulo della forza $F'_{ext} = 7mg/6$ (l'espressione viene dalla F_{ext} determinata al punto precedente) per la proiezione dello spostamento della cassa nella direzione, orizzontale, della forza. Tale proiezione vale, da semplici considerazioni geometriche, $-(L/2)cos\theta = -(h/(2sin\theta))cos\theta = -3h/8$, dove il segno negativo si deve alla circostanza che forza e spostamento hanno componenti antiparallele tra loro. Quindi è $L_{F'} = -(7mg/6)(3h/8) = -7mgh/16$. Mettendo tutto assieme si ottiene $-7mgh/16 = 2mv'^2 - 7mgh/8$, ovvero $2mv'^2 = 7mgh/16$, da cui la soluzione]

2. Una sottile trave omogenea di lunghezza $L = 3.0$ m e massa $m = 8.0$ kg è in equilibrio nella configurazione di figura: essa si trova sospesa a un solaio rigido e indeformabile tramite due funi, inestensibili e di massa trascurabile, agganciate ai suoi estremi (A e B in figura), e l'asse della trave forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Inoltre la fune agganciata all'estremo A è verticale, mentre quella agganciata all'estremo B forma un angolo retto rispetto all'asse della trave. [Usate $g = 9.8$ m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità e ricordate che $sin(\pi/6) = 1/2$ e $cos(\pi/6) = 3^{1/2}/2$, con $3^{1/2} \sim 1.73$]



   a) Quanto valgono, in modulo, le tensioni T_A e T_B delle due funi?

   T_A = …………………………….. = ... N. $mg(1-cos^2\theta/2) = 5mg/8 = 49$ N [la trave, che è un corpo rigido, è in equilibrio sia traslazionale che rotazionale. L'equilibrio traslazionale è garantito dalle componenti delle tensioni delle funi in direzione verticale, che bilanciano la forza peso in direzione verticale. Per la fune A, che è verticale, tutta la tensione di modulo T_A contribuisce all'equilibrio. Per la fune B, invece, occorre proiettare la tensione, ad esempio moltiplicando il suo modulo T_B per il coseno dell'angolo tra fune B e verticale. Tale angolo, essendo compreso tra verticale (ortogonale all'orizzontale) e la direzione ortogonale all'asse della trave risulta pari a θ . Dunque per l'equilibrio traslazionale deve essere $mg = T_A + T_B cos\theta$. Per l'equilibrio rotazionale occorre invece scegliere un polo ed esaminare i momenti delle forze rispetto ad esso. Poiché si è in equilibrio, la scelta è libera e, per esempio, possiamo considerare il polo nel punto A di figura. Rispetto ad esso fanno momento la forza peso, applicata al punto di mezzo della trave, e la tensione T_B . La forza peso ha braccio $(L/2)cos\theta$, la tensione T_B ha braccio L (essa è applicata ortogonalmente all'asse della trave). Inoltre i due momenti delle forze tendono a far ruotare la trave in versi opposti, rispettivamente orario e antiorario. Dunque per l'equilibrio rotazionale deve essere $mg(L/2)cos\theta = T_B L$. Inserendo questo risultato nell'equazione dell'equilibrio traslazionale si ottiene la soluzione. COMMENTO GENERALE: come si può facilmente verificare, la situazione fisica descritta nel problema non può essere realizzata praticamente. Infatti sulla trave agirebbe una componente orizzontale non nulla della forza dovuta alla fune B, che non pu essere equilibrata. Nella valutazione sono stati premiati coloro che se ne sono accorti, e non penalizzati coloro che, invece, hanno seguito questa strada risolutiva o anche l'altra, possibile, basata sulla scomposizione delle forze e sulla scrittura del momento delle forze rispetto al centro di massa]

   T_B = …………………………….. ~ .... N. $mgcos\theta/2 \sim 34$ N [vedi sopra]

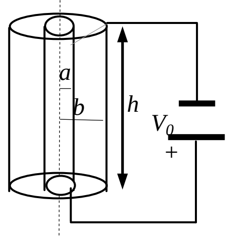
   b) A un dato istante, la fune attaccata all'estremo B viene tagliata, senza impartire alcuna velocità iniziale alla trave. La trave di conseguenza comincia a ruotare attorno al polo A. Quanto vale, in modulo, l'accelerazione **lineare** a_B con cui **comincia a muoversi** l'estremo B della trave? [Determinate l'accelerazione subito dopo il taglio della fune]

a_B = …………………………….. ~ .... m/s^2 $3g\cos\theta/2$ ~ 13 m/s^2 [la trave comincia a ruotare sotto l'effetto del momento della forza peso, che, subito dopo il taglio della fune, vale $mg(L/2)\cos\theta$, come calcolato prima. Tenendo conto che il momento di inerzia di una trave sottile per rotazione attorno a un asse che passa per un suo estremo è $I = mL^2/3$, a questo momento di forze corrisponde un'accelerazione angolare $\alpha = 3g(L/2)\cos\theta$. Poiché l'estremo A si trova a distanza L rispetto al polo, esso sente un'accelerazione tangenziale di modulo αL , da cui la soluzione]

c) Nella sua evoluzione successiva, a un certo istante la trave si trova a passare, ruotando attorno al polo A, per la direzione verticale. Quanto vale la sua velocità angolare ω in questo istante? [Considerate trascurabile ogni forma di attrito]
ω = …………………………….. ~ .... rad/s $(3g/(2L))^{1/2}$ ~ 2.2 rad/s [trascurando gli attriti si può utilizzare la conservazione dell'energia meccanica: $0 = \Delta E_K + \Delta U$. In questa espressione, visto che la trave parte da ferma, è $\Delta E_K = (I/2)\omega^2 = mL^2\omega^2/6$, dove abbiamo usato l'espressione del momento di inerzia citata prima. La variazione di energia potenziale ΔU si deve, invece, alla variazione di quota Δh del centro di massa della trave. Semplicissime considerazioni geometriche mostrano che $\Delta h = L/2 - (L/2)\sin\theta$, per cui $\Delta U = -mg(L/2)(1-\sin\theta) = -mgL/4$, dove abbiamo usato il valore del seno dato nel testo e introdotto un segno negativo per tenere in debito conto la circostanza che il centro di massa diminuisce la sua quota. Risolvendo si trova la risposta]

3. Un cilindro pieno fatto di materiale ottimo conduttore, alto h = 10 cm e di raggio a = 1.0 mm (dunque con $h >> a$) è collegato al polo positivo di un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 5.0x10^3 V. Il polo negativo di questo generatore è collegato a un guscio cilindrico sottile, di raggio b = 5.0 mm e altezza h = 1.0 m, coassiale al cilindro e anch'esso realizzato di materiale ottimo conduttore. Lo spazio tra cilindro e guscio è vuoto e si suppone che il sistema abbia raggiunto condizioni di equilibrio. [Usate ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto; può esservi utile ricordare che $\ln(5) = 1.61$]

Disegno non in scala!



a) Detta Q_a la carica che si trova sulla superficie cilindrica di raggio $r = a$, come si scrive il campo elettrico $E(r)$ nella regione di spazio tra di due cilindri? [Dovete scrivere una funzione che esprime il modulo del campo elettrico per un valore generico della coordinata radiale r , nell'intervallo $a < r < b$; poiché si chiede una funzione, non usate valori numerici ma solo i simboli indicati nel testo; spiegate meglio che potete il procedimento adottato]
$E(r)$ = ……………………………. $Q_a/(2\pi\varepsilon_0 hr)$ [si applica il teorema di Gauss usando una scatola chiusa che è una sorta di barattolo a superficie cilindrica, con il suo asse parallelo a quello dei cilindri e altezza pari a quella dei cilindri. Vista la geometria (simmetria cilindrica) del problema, si può affermare che il campo elettrico abbia direzione radiale e il suo modulo dipende solo da r . Il campo elettrico attraversa la scatola solo attraverso la sua superficie laterale e, poiché fissato r il campo ha lo stesso valore (il modulo dipende solo da r), il flusso si esprime come EA , con $A = 2\pi rh$ superficie laterale della scatola. Per il teorema di Gauss, tale flusso è pari a Q_a/ε_0 . Da qui la soluzione]

b) Quanto vale la carica Q_a che si trova sulla superficie esterna del cilindro, cioè al raggio $r = a$? [Spiegate meglio che potete il procedimento adottato]
Q_a = ……………………………. = ……. C $V_0 2\pi\varepsilon_0 h/\ln(b/a)$ = 1.7x10^{-7} C [si tratta di un banale condensatore ad armature cilindriche. La differenza di potenziale tra le armature vale $\Delta V = -V_0 = -\int_a^b E(r)dr = -(Q_a/(2\pi\varepsilon_0 h))\ln(b/a)$, dove il segno negativo al potenziale V_0 tiene conto del fatto che il guscio si trova a potenziale inferiore rispetto al cilindro, per come è collegato. Da qui si trova la soluzione. Notate che, di conseguenza, la capacità del condensatore vale $Q_a/V_0 = 2\pi\varepsilon_0 h/\ln(b/a)$ = 3.4x10^{-12} F]

c) Quanto vale l'energia U_E immagazzinata nel condensatore realizzato dai due cilindri (il cilindro pieno e il guscio cilindrico sottile)?
U_E = ……………………………. = ……. J $Q_a V_0/2 = V_0^2\pi\varepsilon_0 h/\ln(b/a)$ = 4.3x10^{-4} J [i due cilindri sono le armature di un condensatore che ha accumulato la carica Q_a alla differenza di potenziale V_0 .Dunque la capacità del condensatore è $C = Q_a/V_0$. L'energia accumulata, che è apri al lavoro che il generatore ha eseguito per caricare il condensatore, si esprime come $CV_0^2/2 = Q_a V_0/2$, da cui la risposta]