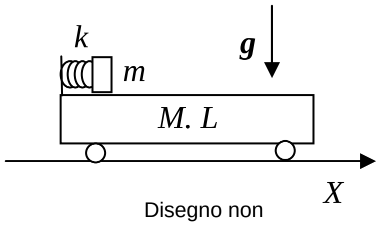
Corso di Laurea STC Chim Curr Appl – ESAME DI FISICA GENERALE – 17/7/2007

Nome e cognome: ………………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

-- PARTE 1

1. Un piccolo carrello di massa M = 10 kg e lunghezza L = 1.0 m può scorrere senza attrito su un piano orizzontale e si trova inizialmente fermo in una certa posizione. Ad un'estremità del carrello si trova una molla di costante elastica k = 1.1x10^4 N/m, un estremo della quale è solidale col carrello stesso. La molla, che è disposta con il suo asse in direzione orizzontale, è inizialmente compressa per un tratto Δ_0 = 2.0 cm (per una causa esterna); un corpo puntiforme di massa m = $M/10$ = 1.0 kg è appoggiato sull'estremo libero della molla. Ad un dato istante la causa esterna che manteneva compressa la molla viene rimossa: la molla si estende ed il corpo di massa m si mette in movimento sul piano del carrello fino a raggiungerne l'estremità e a lasciarlo. [Supponete trascurabile anche l'attrito tra corpo e superficie del carrello]



Disegno non in scala!!

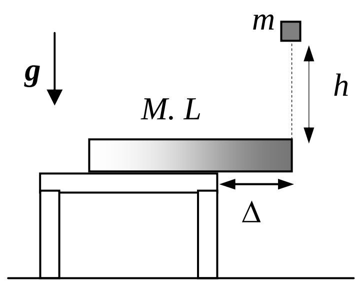
a) Quanto vale lo spostamento ΔX del carrello quando il corpo di massa m ne raggiunge l'estremità e lo lascia? [Considerate un asse X orizzontale orientato verso destra rispetto alla figura; inoltre **supponete nulla la lunghezza** complessiva del complesso corpo + molla, cioè considerate che il corpo percorre una distanza pari ad L **rispetto al piano del carrello** prima di raggiungerne l'estremità]

ΔX = …………………………………… = ……….. m $-mL/(m+M)$ = - 9.1x10^{-2} m [essendo il sistema isolato lungo l'asse X e fermo all'inizio, il centro di massa del sistema non cambia la sua posizione (lungo X). Ricordando che $x_{CM} = (mx + MX)/(m+M)$, dove x ed X sono le posizioni (dei centri di massa) dei due corpi in considerazione, si ha $0 = \Delta x_{CM} = (m\Delta x + M\Delta X)/(m+M)$, da cui $\Delta X = -m\Delta x/M$. A questo punto occorre notare che la massa m esegue nel processo uno spostamento pari ad L **nel riferimento del carrello**, cioè rispetto a queso. Lo spostamento "assoluto", che compare nella precedente equazione, si ottiene, ricordando le regole di somma di vettori, come $\Delta x = L + \Delta X$, da cui la soluzione]

b) Quanto vale, in modulo, la velocità V' del carrello quando il corpo raggiunge l'estremità del carrello stesso, cioè nelle condizioni della domanda precedente?

V' = …………………………………… = ... m/s $(\Delta_0^2\, k\, m/(M(m+M)))^{1/2}$ = 2.0x10^{-1} m/s [per la conservazione della quantità di moto dovuta al fatto che il sistema è isolato (lungo X) si ha $0 = MV' + mv'$, con v' velocità della massa m quando questa raggiunge l'estremità del carrello. Per il bilancio energetico deve anche essere $-\Delta U_{ela} = (k/2)\Delta_0^1 = \Delta E_K = (m/2)v'^2 + (M/2)V'^2$. Combinando le due equazioni si ottiene il risultato]

2. Una sottile asta **diomogenea,** di sezione (trascurabile) quadrata, massa M = 1.0 kg e lunghezza L = 20 cm, è realizzata con un materiale la cui densità di massa **aumenta linearmente** con la distanza da un estremo. L'asta è poggiata sopra un tavolo, in modo da restare parzialmente a sbalzo rispetto al piano del tavolo. Le forze di attrito tra asta e piano del tavolo sono trascurabili. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



a) Si osserva sperimentalmente che l'asta resta in equilibrio (con il suo asse in direzione orizzontale) se la lunghezza Δ della parte mantenuta a sbalzo (vedi figura) è minore di un certo valore Δ_{MAX}. Quanto vale Δ_{MAX}? Commentate bene la risposta!

Δ_{MAX} = …………………………………… = ……….. m $L-x_{CM} = L-2L/3 = L/3$ = 0.17 m [per i motivi spiegati nel commento di seguito, corrisponde a $L - x_{CM}$, essendo la posizione del centro di massa data da: $x_{CM} = \int x\, dm / \int dm = \int x\, \rho_M\, dV / \int \rho_M\, dV$. La dipendenza funzionale della densita di massa ρ_M dalla coordinata x, che rappresenta la distanza dall'estremo ("a massa nulla") dell'asta si deduce dal testo: per esprimere una dipendenza **lineare** si può porre ad esempio $\rho_M = \rho_0\, x/L$. Tenendo conto che l'elemento di volume si può scrivere $dV = Sdx$, con S sezione dell'asta, ed integrando sulkl'intera lunghezza dell'asta, cioè usando estremi di integrazione 0,L, si ottiene il risultato]

Commento alla risposta: .... l'equilibrio richiede bilanciamento delle forze e dei momenti. Le forze (peso e reazione del tavolo) sono sempre bilanciate; affinché siano bilanciati i momenti occorre che la reazione vincolare sia in grado di produrre un momento di segno opposto rispetto a quello della forza peso (applicata al centro di massa) rispetto al perno istantaneo di rotazione, costituito dal bordo del tavolo. Questa condizione richiede che la verticale passante per il centro di massa iaccia all'interno del piano del tavolo, condizione rispettata finché $\Delta \le \Delta_{MAX} = L-x_{CM}$.

b) Con l'asta nelle condizioni espresse nella domanda precedente, cioè in modo tale che la parte a sbalzo è lunga esattamente Δ_{MAX} , una massa puntiforme m = 0.10 kg parte da ferma da un punto collocato sulla verticale dell'estremità a sbalzo dell'asta e posto ad un'altezza h = 1.0 m da questa (vedi figura). L'urto tra massa puntiforme ed asta può essere considerato come totlamente **anelastico**, cioè dopo l'urto la massa rimane conficcata nell'asta. In seguito all'urto si osserva che l'asta comincia a ruotare: quanto vale la sua velocità angolare ω **subito dopo l'urto**?

ω = ... ~ .... rad/s $mv\Delta_{MAX}/I_{tot} = m(2gh)^{1/2}(L/3)/(ML^2/2 - M(2L/3)^2+m\Delta_{MAX}^2) = m(2gh)^{1/2}(L/3)/(ML^2/18 + mL^2/9) = 6m(2gh)^{1/2}/(L(M+2m))$ ~ 11 rad/s [il sistema è isolato rispetto ai momenti delle forze e quindi si conserva il suo momento angolare totale. Pertanto deve essere $L_{in} = mv\Delta_{MAX} = L_{fin} = I_{tot}\,\omega$. La vecloità v della massa m subito prima dell'urto si ottiene dalla conservazione dell'energia: $v = (2gh)^{1/2}$. Il momento di inerzia complessivo del sistema è dato dalla somma di I_{CM} dell'asta (nelle condizioni del problema il polo di rotazione coincide praticamente con il centro di massa) e I_m, momento di inerzia della massa "conficcata", pari a $m\Delta_{MAX}^2$. Per il calcolo di I_{CM} conviene servirsi del teorema degli assi paralleli: $I_{CM} = I_0 - Mx_{CM}^2$, dove $I_0 = \int_0^L x^2 \rho_M\, dV = ML^2/2$. Notate che l'energia cinetica del sistema **non** si conserva, essendo l'urto anelastico, e **non** si conserva neanche la quantità di moto (lungo la direzione verticale), a causa della presenza delle forze di reazione esercitate dal tavolo sull'asta che hanno carattere impulsivo]

--- **PARTE 2**

3. Una carica puntiforme $Q = 1.0\text{x}10^{-15}$ C si trova al centro di un guscio sferico spesso (raggio interno a = 10 cm, raggio esterno b = 20 cm) fatto di un materiale conduttore. Il guscio è **collegato a terra**, ed il sistema si trova in condizioni di equilibrio. [Usate il valore $\varepsilon_0 = 8.8\text{x}10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto, che è il mezzo presente in tutto lo spazio tranne quello occupato dal guscio sferico]
   a) Quanto valgono le cariche Q_a e Q_b che si trovano sulle superfici interna ($r = a$) ed esterna ($r = b$) del guscio?
   Q_a = ... = ... C $-Q_b = -\ 1.0\text{x}10^{-15}$ C [all'interno del guscio conduttore il campo elettrico all'equilibrio è nullo; applicando Gauss si ottiene che nulla deve essere la carica contenuta in una sfera, concentrica con il sistema, di raggio compreso tra a e b da cui si deduce $Q + Q_a = 0$, cioè la soluzione]
   Q_b = ... = ... C 0 [essendo nullo il potenziale del guscio, che è collegato a terra, deve essere nulla la sua differenza di potenziale con un punto posto all'infinito, cioè deve essere nullo il campo esterno al guscio; applicando Gauss su una sfera di raggio maggiore di b questo implica che $0 = Q + Q_a + Q_b$, da cui la soluzione]

   b) Quanto vale il potenziale elettrico V' in un punto che si trova a "metà strada" tra carica puntiforme e superficie interna del guscio, cioè ad una distanza r' = 5.0 cm dal centro del guscio?
   V' = ... ~ .... V $(Q/(4\pi\varepsilon_0))\ (1/r'-1/a)$ ~ $9.0\text{x}10^{-5}$ V [si ha che V'equivale alla differenza di potenziale tra il punto in questione ed un punto del guscio sferico, che ha **tutto** potenziale nullo. Quindi $V' = -\int_a^{r'} E dr = -\int_a^{r'} (Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2))\, dr$ da cui, calcolando l'integrale, si ottiene la soluzione]

4. Un condensatore è realizzato con due armature conduttrici circolari di raggio a = 10 cm poste parallelamente tra loro a distanza reciproca d = 2.0 mm. Lo spazio tre le armature è riempito per metà da un materiale 1 debolmente conduttore con resistività $\rho_1 = 1.0\text{x}10^3$ ohm m e per metà da un materiale 2, anch'esso debolmente conduttore, ma di resistività $\rho_2 = 5.0\text{x}10^3$ ohm m Questi materiali sono disposti in modo da riempire lo spazio rispettivamente compreso tra un'armatura ed il piano collocato a distanza $d/2$ da questa, e da qui fino all'altra armatura. Entrambi i materiali hanno la costante dielettrica del vuoto $\varepsilon_0 = 8.8\text{x}10^{-12}$ F/m. Le armature sono collegate ad un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 50 V e si sa che il sistema ha raggiunto condizioni di equilibrio.
   a) Quanto vale la carica Q che si deposita alla superficie di separazione tra i due materiali 1 e 2?
   Q = ...= .... C $(E_2 - E_1)\,\pi a^2\,\varepsilon_0 = (2/d)V_0\,((\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1))\pi a^2\,\varepsilon_0 = 9.2\text{x}10^{-9}$ C [il sistema si comporta come un resistore, o meglio come una serie di due resistori (1 e 2). Dato che le armature sono molto estese laterlamente e poco distanti l'un l'altra, si possono trascurare gli effetti ai bordi e quindi si può supporre che i campi elettrici nei due materiali, $\boldsymbol{E_1}$ ed $\boldsymbol{E_2}$, siano ortogonali alle armature ed **uniformi** all'interno delle due armature. La condizione sulla differenza di potenziale implica allora: $E_1 d/2 + E_2 d/2 = (E_1+E_2)d/2 = V_0$. I campi hanno intensità diversa, ma, poiché la corrente fluisce in modo uniforme e la densità di corrente deve essere la stessa nei due materiali (per la continuità della corrente), le intensità sono legate dalla relazione: $j_1=E_1/\rho_1 = j_2 = E_2/\rho_2$. Unendo le due equazioni si ottiene : $E_1 = (2/d)V_0\rho_1/(\rho_1+\rho_2)$; $E_2 = (2/d)V_0\rho_2/(\rho_1+\rho_2)$. Il teorema di Gauss applicato ad una superficie cilindrica (sempre di raggio a) con l'asse parallelo all'asse del condensatore e con le superfici di base una nel materiale 1 e l'altra nel materiale 2 permette di legare la discontinuità del campo alla carica che si accumulal sull'interfaccia: $E_2 - E_1 = Q/(\pi a^2\varepsilon_0)$, da cui la soluzione]

   b) Quanto valgono in modulo, direzione e verso i campi magnetici $\boldsymbol{B_1}$ e $\boldsymbol{B_2}$ misurati ad una distanza r = 5.0 cm rispetto all'asse passante per i centri delle due armature all'interno dei materiali rispettivamente 1 e 2? [Usate il valore $\mu_0 = 4\pi\text{x}10^{-7}$ T m/A per la permeabilità magnetica del vuoto]
   Direzione e verso dei campi: .... direzione tangenziale e verso stabilito dalla regola della mano destra; infatti la presenza di campo magnetico è dovuta alla corrente che fluisce nel sistema e che ha direzione assiale
   B_1 = ...= .... T $\mu_0 J\, \pi r^2/(2pr) = \mu_0 V_0\, r/(d(\rho_1+\rho_2)) = 2.6\text{x}10^{-7}$ T [dal teorema di Ampere calcolato su un percorso circolare di raggio r ; la corrente concatenata a questo circuito è data dal flusso di $\boldsymbol{j}$ nel cerchio delimitato dalla circonferenza. L'espressione di j è stata determinata nella risposta al punto precedente]
   B_2 = ...= .... T $B_1 = 2.6\text{x}10^{-7}$ T (t) [dato che $\boldsymbol{j_1} = \boldsymbol{j_2}$]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).
Pisa, 17/7/2007 Firma: