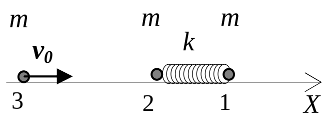
Corso di Laurea STC Chim Curr Appl – ESAME DI FISICA GENERALE – 19/9/2007

Nome e cognome: ………………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1) Un sistema è costituito da due corpi puntiformi, denominati "1" e "2", di identica massa m = 300 g collegati tra loro da una molla di massa trascurabile e costante elastica k = 20.0 N/m disposta lungo l'asse X (**orizzontale**) di un sistema di riferimento; inizialmente la molla si trova alla sua lunghezza di riposo ed i corpi sono fermi. Un terzo corpo, "3", identico ai precedenti, si muove in direzione dell'asse X ("verso il sistema") con una velocità iniziale v_0 = 6.00 m/s in modo da urtare il corpo "2", come rappresentato in figura; dopo l'urto, i corpi "2" e "3" restano **attaccati tra loro**. Il moto di tutti e tre i corpi (e ovviamente anche della molla di collegamento) lungo l'asse X avviene **senza attrito** ed il problema è **unidimensionale**; inoltre considerate **trascurabile** l'energia che viene dissipata nell'atto dell'urto del corpo "3" e del corpo "2".

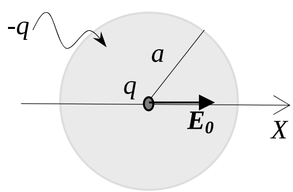


a. Si osserva che, dopo l'urto, la molla si comprime fino a raggiungere una condizione di **massima compressione**: quanto valgono le velocità v_1 , v_2, v_3 dei tre corpi in questa situazione? [Fate attenzione al fatto che si sta considerando esattamente l'istante in cui la molla sperimenta la sua compressione massima!]
v_1 = ……………… = …… m/s v_2 = ……………… = …… m/s v_3 = ……………… = …… m/s $v_1=v_2=v_3=v_0/3=$ 2.00 m/s [le velocità dei corpi "2" e "3" sono uguali perché i due corpi sono, per ipotesi, attaccati l'un l'altro; inoltre anche la velocità del corpo "1" deve essere la stessa, altrimenti la situazione non sarebbe quella di massima compressione della molla (ci sarebbe moto relativo dei due estremi della molla, che quindi starebbe cambiando la sua estensione). Detta v la velocità comune dei tre corpi, si ha per la conservazione della quantità di moto: $mv_0 = mv_1 + mv_2 + mv_3 = 3mv$, da cui la soluzione]

b. Quanto vale la compressione massima Δ della molla? [Per i pignoli: supponete che la lunghezza di riposo sia "compatibile" con il risultato determinato, cioè che essa sia maggiore di Δ]
Δ = …………………………… = ………. m $(2m/(3k))^{1/2}v_0$ = 6.00x10^{-1} m [non essendoci processi dissipativi si può usare il bilancio energetico nella forma $0 = \Delta E_K + \Delta U_{ela}$, con $\Delta E_K = (m/2)v_1^2 + (m/2)v_2^2 + (m/2)v_3^2 - (m/2)v_0^2 = (m/2)3v^2-(m/2)v_0^2 = -(m/2)(2/3)v_0^2$. La soluzione si ottiene notando che $\Delta U_{ela} = (k/2)\Delta^2$]

c. Dopo aver raggiunto la posizione di massima compressione, la molla si estende tornando a passare per la sua lunghezza di riposo. Quanto vale la velocità v_1' **del corpo 1** in questo preciso istante?
v_1' = …………………………… ~ ………. m/s $v_0(2+(28)^{1/2})/6$ ~ 7.29 m/s [applicando ancora la conservazione dell'energia meccanica (scegliendo sempre come situazione iniziale quella in cui il corpo 3 non ha ancora urtato il sistema e la molla è alla sua lunghezza di riposo), si ottiene $0 = \Delta E_K = (m/2)v_1'^2 + 2(m/2)V'^2 - (m/2)v_0^2$, dove V' indica la velocità (comune) dei corpi 2 e 3 nell'istante considerato. Semplificando e riarrangiando si ottiene quindi $v_1'^2 + 2V'^2 = v_0^2$. D'altra parte deve pure essere, per la conservazione della quantità di moto che continua a valere (l'intero sistema è sempre isolato lungo l'asse X), $mv_0 = mv_1'+2mV'$, da cui $v_1' + 2V' = v_0$. Mettendo a sistema le due equazioni si ottiene la soluzione (l'altra soluzione dell'equazione del secondo grado che risulta dal sistema viene esclusa perché, indicando una velocità negativa, non si riferisce all'istante considerato)]

2) In un modello atomico molto semplificato (che assomiglia al cosiddetto modello di Thomson), si può supporre che la carica q del nucleo sia concentrata in un punto, e che la carica della nube elettronica sia delocalizzata formando una **sfera** con densità di carica **uniforme** e raggio a.



a. Supponendo di considerare l'atomo di idrogeno e sapendo che a = 5.0x10^{-2} nm, quanto vale la densità volumica di carica ρ della nube elettronica? [Usare il valore e = 1.6x10^{-19} C per la carica elementare]
ρ = …………………………… = ……... C/m^3 $-3e/(4\pi a^3)$ = - 3.1x10^{11} C/m^3 [essendo la distribuzione uniforme si ha semplicemente $\rho = -q/V$, con $q = e$ e $V = (4/3)\pi a^3$ volume della sfera]

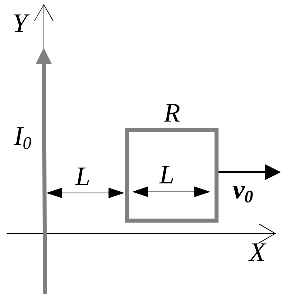
b. Immaginate ora che il sistema considerato venga posto in un campo elettrico esterno uniforme e costante diretto nel verso positivo dell'asse X di un sistema di riferimento (con l'origine nel centro della distribuzione sferica di carica negativa, come rappresentato in figura) e di modulo E_0. Imponendo che la distribuzione di carica negativa (la nube elettronica) resti **fissa** nello spazio e che mantenga la sua forma sferica omogenea, come si scrive la posizione x_{EQ} in cui si viene a trovare all'equilibrio il nucleo (il protone)? [Non occorre una risposta numerica per questa domanda; per i pignoli: si supponga che l'intensità del campo applicato sia tale da non "separare" le cariche di segno opposto che costituiscono l'atomo]

x_{EQ} = ... $4\pi a^3 \varepsilon_0 E_0 / e$ [all'equilibrio deve essere $qE_0 + qE_{INT} = 0$. Il campo interno E_{INT} è quello generato dalla distribuzione di carica e dipende da x in modo lineare. Infatti, scegliendo una superficie di Gauss sferica di raggio x generico centrata nell'origine, si ha $E_{INT} 4\pi x^2 = Q_{INT}/\varepsilon_0 = \rho 4\pi x^3/(3\varepsilon_0)$, da cui $E_{INT} = \rho\, x/(3\varepsilon_0)$, che conduce alla soluzione]

c. Il campo elettrico esterno viene quindi spento e il protone tende a tornare nella sua posizione iniziale. Detto $t_0 = 0$ l'istante di spegnimento del campo, in quale istante t' il protone torna nella posizione iniziale ($x = 0$)? [Per il calcolo, assumete $m = 1.6\text{x}10^{-27}$ Kg per la massa del protone ed $\varepsilon_0 = 8.8\text{x}10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica del vuoto; fate attenzione a considerare bene che tipo di moto compie il protone e considerate trascurabile ogni forma di attrito]

t' = ... ~ .... s $\pi/(2\omega) = (\pi^3\, \varepsilon_0\, a^3\, m)^{1/2}/ e \sim 1.5\text{x}10^{-15}$ s [l'equazione del moto del protone lungo l'asse x dopo lo spegnimento del campo esterno è $A = qE_{INT}/m$, dove A indica l'accelerazione del protone stesso. Sulla base di quanto discusso nella risposta al quesito precedente, si vede che questa equazione è quella di un **moto armonico** con pulsazione $\omega = (e^2/(4\pi\varepsilon_0 a^3 m))^{1/2}$. L'istante t' corrisponde a $T/4$, dove il periodo dell'oscillazione è $T = 2\pi/\omega$, da cui la soluzione]

3) Un lungo filo elettrico disposto lungo l'asse Y di un sistema di riferimento cartesiano è percorso da una corrente elettrica stazionaria di intensità I_0 diretta nel verso indicato in figura. "A fianco" del filo si trova una spira quadrata di lato L fatta di un filo elettrico la cui resistenza complessiva vale R. La spira, che giace sul piano XY del riferimento, viene mossa da un operatore esterno che la fa muovere a velocità **costante** di modulo v_0 in direzione X (positiva). Ad un dato istante un lato della spira si trova a distanza L rispetto al filo (osservate la figura per capire la situazione!).



a. Come si scrive la forza elettromotrice ε indotta sulla spira nell'istante preso in considerazione? [Non occorre una risposta numerica: date una risposta "letterale" tenendo in conto i dati noti del problema; indicate con μ_0 la permeabilità magnetica del vuoto]

ε = ...$v_0\, \mu_0\, I_0 /(4\pi)$ = - 3.1x10^{11} C/m^3 [tenendo conto dell'espressione della forza di Lorentz su una carica generica appartenente al filo della spira, il campo "impresso" sul lato "sinistro" della spira (riferito alla figura) vale $E^*_S = v_0 B_S$, essendo B_S il campo magnetico prodotto dal filo nella posizione occupata da quel lato della spira. Usando il teorema di Ampere si trova, in modulo, $B_S = \mu_0\, I_0/(2\pi L)$, da cui $E^*_S = v_0\, \mu_0\, I_0/(2\pi L)$. Con analoghe considerazioni si ottiene, per il lato di destra, $E^*_D = v_0\, \mu_0\, I_0/(2\pi(2L))$. La forza elettromotrice indotta si ottiene facendo la circuitazione del campo impresso sull'intera spira; nella circuitazione "contano" soltanto i due lati considerati, visto che per gli altri la forza di Lorentz, e quindi il campo impresso, ha direzione ortogonale ai lati stessi. Prendendo (arbitrariamente) come positivo il verso di circuitazione oraria, e notando che il campo impresso è uniforme sull'intera lunghezza dei lati considerati, si ottiene: $\varepsilon = L(E^*_S - E^*_D)$, da cui la soluzione. Allo stesso risultato si può anche giungere usando la legge di Faraday, al prezzo, però, di una complicata integrazione sulla superficie necessaria per esprimere il flusso del campo magnetico attraverso la spira]

b. Come si scrive, in modulo, la forza meccanica complessiva F che si esercita sulla spira nello stesso istante? Quali sono la sua direzione ed il suo verso?

F = ... $(\varepsilon/R)\, \mu_0\, I_0 /(4\pi) = v_0\, (\mu_0\, I_0 /(4\pi))^2/R$

Direzione e verso: .... verso negativo dell'asse X di figura [la forza elettromotrice indotta sulla spira corrisponde ad una corrente di intensità $I = \varepsilon/R$. Usando nel modo corretto la regola della mano destra e facendo riferimento alla figura, si verifica che questa corrente circola in senso orario all'interno della spira. Poiché essa si trova immersa nel campo elettrico generato dal filo, si verificheranno delle forze di natura magnetica. In particolare su un elementino (generico) $\boldsymbol{dl}$ di lunghezza della spira, si avrà una forza (infinitesima) $\boldsymbol{dF} = I\, \boldsymbol{dl}\text{x}\boldsymbol{B}$, con $\boldsymbol{B}$ campo magnetico generato dal filo. Facendo riferimento alla figura, è facile notare che questo campo è entrante nel foglio; dunque la forza sarà sempre diretta ortogonalmente rispetto ai quattro lati della spira, con un verso che "esce" (per intendersi!) dalla spira stessa. Sui due lati orizzontali (rispetto alla figura) le forze si bilanceranno, dato che, per ogni elementino di questi lati, il campo magnetico assume lo stesso valore in modulo. Invece sui due lati verticali il campo, come già discusso, ha valore diverso, e quindi la forza risultante avrà direzione X. Il verso si ottiene notando che il campo è più intenso sul lato di sinistra. L'espressione del modulo della forza, infine, si ottiene usando l'espressione del campo magnetico come fatto in precedenza, notando ancora una volta che esso è uniforme su ogni elementino dei singoli lati, e quindi l'integrazioe è immediata]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 19/9/2007 Firma: ______________________