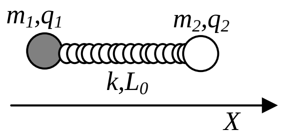
Corso di Laurea STC Chim Curr Appl – ESAME DI FISICA GENERALE – 5/2/2008

Nome e cognome: ……………………………………………………….   Matricola: ……………

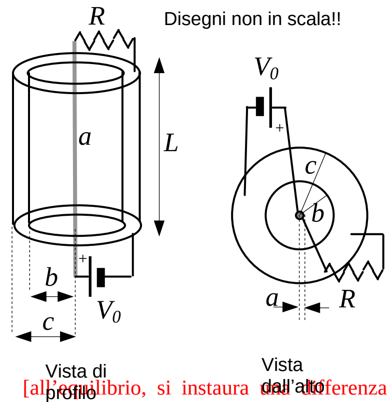
Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*



1. Un sistema (che assomiglia ad una molecola polare lineare) è costituito da due particelle cariche, di massa e carica rispettivamente $m_1 = M$, $q_1 = Q$, e $m_2 = M$, $q_2 = -Q$, unite tra loro da una molla di massa trascurabile con costante elastica k e lunghezza di riposo L_0. Il moto delle particelle può avvenire solo lungo la direzione dell'asse della molla, cioè il problema è unidimensionale. [In questo problema non ci sono dati numerici: le risposte vanno date in funzione dei dati **letterali** noti. Indicate con κ la costante della forza elettrica]
   a) Come si scrive l'equazione che stabilisce la lunghezza L_{EQ} della molla in condizioni di equilibrio? [Per questa risposta immaginate che la particella 1 sia fissa; inoltre supponete trascurabile ogni forma di attrito o ogni altro tipo di forza nel moto delle particelle]
   …………………………………… $0=-\kappa Q^2/L_{EQ}^2-k(L_{EQ}-L_0)$, ovvero $L_{EQ}^3-L_0L_{EQ}^2+\kappa Q^2/k = 0$ [all'equilibrio la forza elettrica attrattiva tra le cariche, che vale $-\kappa Q^2/L_{EQ}^2$, è "bilanciata" dalla forza elastica, repulsiva (essendo la molla compressa), che vale $-k(L_{EQ}-L_0)$; notate che l'equazione algebrica che si ottiene è del terzo grado, e quindi non facilmente risolvibile (e d'altra parte il problema non richiede la soluzione esplicita)]

   b) Supponete ora che le due particelle vengano spostate dalla loro posizione di equilibrio a causa di una forza esterna, in modo che la molla si distenda fino alla lunghezza $L'=2L_{EQ}$. All'istante $t_0 = 0$ la forza viene rimossa istantaneamente e le particelle, inizialmente ferme, si riavvicinano. Come si scrivono le espressioni per le loro velocità v_1 e v_2 quando esse ripassano per la posizione di equilibrio (ovvero quando la molla torna ad avere la lunghezza di equilibrio)?
   v_1 = …………………………………… $-(\kappa Q^2/(2L_{EQ})+(k/2)(3L_{EQ}^2-2L_{EQ}L_0))^{1/2}/M$ [per la conservazione dell'energia meccanica deve essere: $0 = \Delta E_K + \Delta U_{ELA} + \Delta U_E = (m_1/2)v_1^2+(m_2/2)v_2^2+(k/2)(L_{EQ}-L_0)^2-(k/2)(L'-L_0)^2-\kappa Q^2(1/L')+\kappa Q^2(1/L_{EQ})$, dove abbiamo usato l'espressione per l'energia elastica per una molla di lunghezza L generica, $U_{ELA}=(k/2)(L-L_0)^2$, e per l'energia elettrica di due cariche di segno opposto che si trovano a distanza relativa L, $U_E = -\kappa Q^2(1/L)$. D'altra parte, essendo il sistema isolato, deve conservarsi la quantità di moto totale del sistema, cioè deve essere $0 = m_1v_1+m_2v_2$, ovvero, essendo le masse uguali, $v_1=-v_2$. Tenendo conto di questo e facendo qualche passaggio algebrico, la conservazione dell'energia si scrive: $0 = Mv_1^2+(k/2)(L_{EQ}^2-2L_{EQ}L_0+L_0^2-4L_{EQ}^2+4L_{EQ}L_0-L_0^2)-\kappa Q^2/(2L_{EQ})=Mv_1^2+(k/2)L_{EQ}(2L_0-3L_{EQ})-\kappa Q^2/(2L_{EQ})$, da cui la soluzione (il segno meno tiene conto del fatto che la particella 1 avrà una velocità diretta nel verso negativo dell'asse X)]
   v_2 = …………………………………… $-v_1$ [vedi sopra]

   c) Come si scrive l'equazione del moto relativo $a_{REL} = a_2-a_1$? [Scrivere l'equazione del moto significa scrivere l'accelerazione in funzione dei dati e delle variabili del problema; se lo ritenete utile, indicate con x la coordinata spaziale nella direzione dell'asse della molla, ovvero del moto delle particelle, centrando il riferimento sulla posizione della particella 1]
   a_{REL} = …………………………………… = ... m/s $(-k(x-L_0) - \kappa Q^2/x^2)/(2M)$ [l'equazione del moto relativo stabilisce che $a_{REL} = F/\mu$, dove F è la risultante delle forze e $1/\mu = 1/m_1+1/m_2= 1/(2M)$ è la massa ridotta del sistema. Avendo scelto il sistema di riferimento suggerito nel testo, si ha $F = -k(x-L_0) - \kappa Q^2/x^2$, da cui la soluzione]



2. Un dispositivo elettrico è costituito da un lungo e sottile filo buon conduttore di raggio a = 1.0 mm e lunghezza L = 1.0 m posto in modo da essere coassiale a un guscio cilindrico spesso, fatto anch'esso di materiale buon conduttore e con raggio interno b = 1.0 cm e raggio esterno c = 2.0 cm (la lunghezza del guscio cilindrico è pari ad L). Il sistema, inizialmente scarico, viene collegato ad un generatore ideale di differenza di potenziale continua V_0 = 10 V e ad un resistore elettrico, di resistenza R = 5.0 ohm, collegati come schematizzato in figura. [Nella soluzione tenete conto della geometria del sistema, trascurando gli "effetti ai bordi"; usate i seguenti valori numerici per costante dielettrica e permeabilità magnetica del vuoto: $\varepsilon_0 = 8.8\times10^{-12}$ F/m, $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ T m/A]
   a) Quanto valgono, in condizioni stazionarie (ovvero di equilibrio elettrostatico) le cariche elettriche Q_a, Q_b, Q_c che si trovano sulle superfici cilindriche di raggio $r = a$, $r = b$, $r = c$, rispettivamente? [Può farvi comodo ricordare che $\int(1/x)dx = ln(x)$ e che $ln(10)\sim2.3$]
   Q_a = …………………………………… ~ ………… C $V_0 2\pi\varepsilon_0 L/(ln(b/a)) \sim 2.4\times10^{-10}$ C [all'equilibrio, si instaura una differenza di potenziale $\Delta V_{ba} =-V_0$, mentre è anche ΔV_{bc} =0 (un conduttore in equilibrio è equipotenziale). Dunque deve essere $V_0 = \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$. D'altronde il campo nella regione $a<r<b$ ha direzione radiale (trascurando gli "effetti ai bordi") e la sua dipendenza da r può essere determinata applicando il teorema di Gauss ad una superficie cilindrica (le basi non contano essendovi nullo il flusso) coassiale al sistema e di raggio r generico, tale da raqcchiudere la carica Q_a. Si ha: $\Phi(E) = 2\pi rLE(r) = Q_a/\varepsilon_0$, cioè $E(r) = Q_a/(2\pi Lr)$. Sostituendo nell'espressione della differenza di potenziale, risolvendo l'integrale e riarrangiando si ottiene la soluzione]
   Q_b = …………………………………… ~ ………… C $-Q_a = -2.4\times10^{-10}$ C [poiché il campo nel guscio, cioè per $b<r<c$, deve essere nullo (si è in un conduttore all'equilibrio), applicando il teorema di Gauss ad un cilindro di raggio generico $b<r<c$ e tenendo conto della simmetria cilindrica, si ha che la carica che vi è contenuta deve essere nulla, da cui la risposta]
   Q_c = …………………………………… = ………… C 0 [dato che il sistema è inizialmente scarico ed il generatore non fa altro che spostare in posti diversi cariche di segno diverso, il guscio non può portare altra carica rispetto a quella che si trova ad $r=b$, da cui la soluzione]

   b) Quanto vale, in modulo, il campo elettrico E_1,E_2,E_3 calcolato rispettivamente alle distanze dall'asse r_1 = 5.0 mm, r_2 = 15 mm, r_3 = 25 mm? Commentate anche su direzione e verso. [Notate che le tre posizioni si trovano tra filo e guscio, all'interno del guscio, all'esterno del guscio e continuate a considerare trascurabili gli "effetti al bordo"]
   E_1 = …………………………………… ~ ………… V/m $Q_a/(2\pi\varepsilon_0 Lr_1) = V_0/r_1 (ln(b/a)) \sim 8.7\times10^2$ V/m [si calcola servendosi del teoema di Gauss, come mostrato in precedenza]
   E_2 = …………………………………… = ………… V/m 0 [si è all'interno di un conduttore all'equilibrio]
   E_3 = …………………………………… = ………… V/m $(Q_a+Q_b)/ (2\pi\varepsilon_0 Lr_1)=0$ [vedi la risposta alla domanda precedente]
   Direzione e verso: .... dove non nullo e trascurando gli effetti ai bordi, il campo è radiale uscente

c) Quanto vale, in modulo, il campo magnetico B_1, B_3 calcolato rispettivamente alle distanze dall'asse r_1 = 5.0 mm ed r_3 = 25 mm? Commentate anche su direzione e verso. [Notate che le posizioni sono le stesse considerate sopra]

B_1 = ……………………………………. = ……….. T $\mu_0 I_a /(2\pi r_1) = \mu_0 V_0 /(2\pi r_1 R) = 8.0\text{x}10^{-5}$ T [per la simmetria considerata il campo si calcola con il teorema di Ampere circuitando su una circonferenza di raggio r_1; il risultato si ottiene notando che la corrente concatenata a questa circuitazione, indicata con I_a , è quella che passa per il filo e vale V_0/R]

B_3 = ……………………………………. = ……….. T 0 [[applicando Ampere ad una circonferenza di raggio $r>c$ si vede che la corrente concatenata è data dalla somma algebrica di quella che scorre nel filo e di quella che scorre nel (o sul) guscio. Poiché quest'ultima scorre sicuramente nel verso opposto ed ha uguale intensità, la somma è nulla così come il campo magnetico generato]

Direzione e verso: .... dove non nullo e trascurando gli effetti ai bordi, il campo è tangenziale e di verso che soddisfa la regola della mano destra

---

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 5/2/2008 Firma: