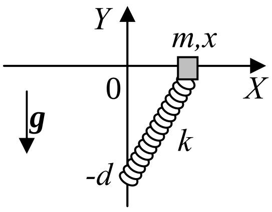
CdL STCi.a. □ / Chim.c.a. □ – ESAME DI FISICA GENERALE – 18/6/2008

Nome e cognome: ………………………………………………………………   Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

-- **PARTE 1**

1. Un sottile tondino di metallo rigido e indeformabile si trova lungo l'asse X (orizzontale) di un sistema di riferimento. Un manicotto di massa m, che ha la forma di un piccolo cilindro cavo, può scorrere senza attrito lungo tale tondino; come rappresentato in figura, il manicotto, che può essere considerato **puntiforme**, è attaccato ad una molla il cui altro estremo è rigidamente fissato nel punto di coordinate $x = 0$, $y = -d$ dello stesso sistema di riferimento. La molla ha costante elastica k (nota) mentre la sua massa ed anche la sua lunghezza di riposo possono essere considerate **trascurabili**.



   a) Come si scrive l'equazione del moto del manicotto $a(x)$, ovvero la sua accelerazione **lungo l'asse** X in funzione della posizione x (generica)? Come si scrive la reazione vincolare $N(x)$ che il tondino esercita sul manicotto quando questo si trova in posizione x (generica)? Notate che la reazione vincolare ha **solo componente lungo** Y. [Non usate valori numerici per questa risposta! Suggerimento: considerate attentamente la geometria e usate in modo opportuno le regole fondamentali della trigonometria per le proiezioni di vettori]

   $a(x)$ = …………………………………… $-(k/m)(x^2+d^2)^{1/2}x/(x^2+d^2)^{1/2} = -(k/m)x$ [sul manicotto agisce la forza elastica che ha modulo kL, dove la lunghezza della molla vale, per il teorema di Pitagora, $L=(x^2+d^2)^{1/2}$ (si è usato il fatto che la lunghezza di riposo della molla è trascurabile). La forza in direzione X si ottiene proiettando in direzione X, cioè moltiplicando per $\cos\theta$, con θ angolo compreso tra asse X e asse della molla (evidentemente dipendente dalla posizione del manicotto). La trigonometria suggerisce $\cos\theta = x/(x^2+d^2)^{1/2}$, da cui, tenendo in debito conto il verso della forza, esce la soluzione]

   $N(x)$ = …………………………………… $mg+k(x^2+d^2)^{1/2}d/(x^2+d^2)^{1/2} = mg+kd$ [la reazione vincolare che il tondino esercita sul manicotto è data, in modulo, dalla componente verticale della forza elastica sommata alla forza peso. La componente verticale della forza elastica si trova usando la trigonometria come nella risposta precedente, notando stavolta che il modulo della forza deve essere moltiplicato per $\sin\theta = d/(x^2+d^2)^{1/2}$. Per quanto riguarda il segno, esso è sicuramente positivo nel sistema di riferimento considerato]

   b) Supponete che inizialmente il manicotto, la cui massa è m = 50 g, sia trattenuto nella posizione x_0 = 40 cm da una forza esterna e che all'istante t_0 = 0 questa forza venga rimossa, in modo che il manicotto cominci a muoversi partendo da fermo. Sapendo che k = 20 N/m e d = 30 cm, quanto vale la velocità v del manicotto quando questo passa per la posizione x = 0 (cioè per l'origine del riferimento)?

   v = …………………………………… ~ .... m/s $(k/m)^{1/2}x_0$ = 8.0 m/s [non essendoci forze dissipative si conserva l'energia meccanica, cioè: $0 = \Delta E_k+\Delta U_{ELA} = (m/2)v^2+(k/2)d^2-(k/2)(x_0^2+d^2)$, dove abbiamo notato che inizialmente la molla ha lunghezza $(x_0^2+d^2)^{1/2}$ mentre "alla fine" (cioè quando il manicotto passa per la posizione x = 0) ha lunghezza d]

2. Due ioni positivi di carica q si avvicinano l'un l'altro muovendosi entrambi lungo l'asse X di un sistema di riferimento. I due ioni hanno masse rispettivamente $m_1 = m$ e $m_2 = 3m$ e le loro velocità iniziali, misurate quando la loro distanza è così grande da poter essere considerata "infinita", hanno lo stesso **modulo**, cioè $v_{01} = v_0$ e $v_{02} = v_0$ (fate attenzione al fatto che gli ioni si muovono l'uno contro l'altro, cioè il verso delle due velocità è opposto!). [Trascurate ogni forma di attrito e ogni effetto della forza peso sul moto degli ioni; per la soluzione non usate valori numerici, che in questo problema non ci sono, ma impiegate i valori letterali noti, in particolare q,m e v_0]

   a) Si osserva che gli ioni si avvicinano l'un l'altro fino a raggiungere una distanza minima, per poi riallontanarsi. Come si esprimono le velocità v_1 e v_2 degli ioni quando nell'istante in cui essi si trovano alla distanza minima tra di loro?

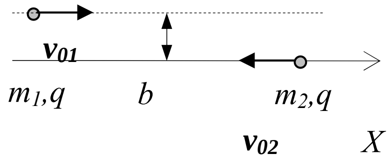
   v_1 = …………………………………… $(m_1v_{01} - m_2v_{02})/(m_1+m_2) = -v_0\ /2$ [il sistema è isolato e quindi si conserva la quantità di moto totale: $m_1v_{01}-m_2v_{02} = mv_0(1-2) = m_1v_1+m_2v_2 = m(v_1+3v_2)$, dove si è fatto uso delle relazioni numeriche fra le varie masse e velocità e si è tenuto in debito conto il segno delle velocità (supponendo che lo ione 2 si muovesse nel verso negativo dell'asse X e lo ione 1 in quello positivo). Inoltre nell'istante in cui gli ioni si trovano alla distanza minima le loro velocità devono essere uguali, altrimenti nell'istante successivo potrebbero ulteriormente avvicinarsi. Quindi $v_1=v_2$, da cui la soluzione; notate che il segno negativo sta ad indicare che la velocità è diretta nel verso negativo dell'asse X]

   v_2 = …………………………………… v_1 [vedi sopra]

   b) Come si esprime il valore della distanza minima D? [Usate il simbolo κ per la costante della forza elettrica]

   D = …………………………………… $\kappa q^2/((m_1/2)v_{01}^2+(m_2/2)v_{02}^2-(m_1/2)v_1^2-(m_2/2)v_2^2) = (8/9)\kappa q^2/(mv_0^2)$ [non essendoci forze dissipative si conserva l'energia meccanica del sistema, cioè: $0 = \Delta E_K + \Delta U_E = (m_1/2)v_1^2+(m_2/2)v_2^2-(m_1/2)v_{01}^2-(m_2/2)v_{02}^2+\kappa q^2/D$, dove si è espressa la variazione dell'energia elettrostatica tra la situazione iniziale (in cui l'energia elettrostatica è nulla, essendo "infinita" la distanza tra le cariche) e quella "finale" (l'espressione si ottiene facilmente integrando la forza elettrica $\kappa q^2/x^2$ tra le posizioni iniziale e "finale"). Il risultato si ottiene usando la risposta al quesito precedente e le varie relazioni tra masse e velocità suggerite dal testo]

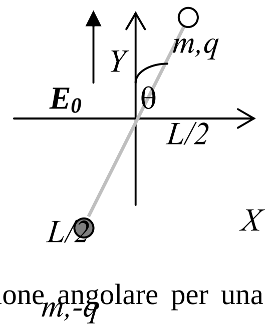
c) Commentate brevemente su come cambierebbero il problema e le sue soluzioni nel caso in cui lo ione 1 si muovesse inizialmente lungo un asse parallelo all'asse X ma collocato a distanza b da questo (supponete che nulla cambi nel moto iniziale dello ione 1), come rappresentato schematicamente in figura.



Commento: .... il problema non è più unidimensionale, cioè l'urto fra i due ioni non è più di tipo "centrale". La traiettoria degli ioni non è più rettilinea, dato che la forza elettrica di interazione (repulsiva) tende ad allontanare i due ioni lungo la direzione della congiungente fra i loro centri. Tuttavia le risposte date in precedenza sono ancora valide, almeno in parte. Infatti il sistema continua ad essere isolato (nelle due direzioni X ed Y) e la velocità dei due ioni deve ancora essere la stessa nell'istante di massimo avvicinamento, anche se stavolta essa non sarà diretta solo lungo X ma avrà componenti anche lungo Y. Analogamente la distanza minima trovata sopra continuerà a valere, ma dovrà intendersi come misurata non lungo X ma lungo la congiungente dei centri dei due ioni.

-- **PARTE 2**

3. Una molecola polare lineare può essere schematizzata come un sistema di due cariche di segno opposto (q e –q) entrambe di massa m, tenute insieme da un'asta rigida di massa trascurabile e lunghezza L. Supponete che una tale molecola si trovi su un sistema di riferimento in modo che, all'istante t_0=0, il suo asse formi un angolo $\theta=\theta_0$ rispetto all'asse Y,come rappresentato in figura; inoltre l'origine del riferimento è scelta in modo da trovarsi a metà dell'asta. In questo stesso istante t_0=0 viene acceso un campo elettrico **uniforme** di modulo E_0 e direzione dell'asse Y (positiva, come in figura) che agisce in modo omogeneo su tutto lo spazio di interesse. [Non usate valori numerici, che non ci sono in questo problema, in cui dovete esprimere le soluzioni in funzione dei dati letterali noti; trascurate ogni forma di attrito ed ogni effetto della forza peso!]



   a) Come si scrivono l'accelerazione traslazionale del centro di massa, a_0, e l'accelerazione angolare per una rotazione attorno al centro di massa, α_0, subito dopo l'accensione del campo elettrico?

   a_0 = ... $(q\mathbf{E_0} - q\mathbf{E_0})/(2m) = 0$ [le forze elettriche che agiscono sulle due cariche, che sono le uniche forze esterne sul sistema, sono uguali ed opposte]

   α_0 = ... $-2qE_0(L/2)\sin\theta_0/(mL^2/2) = -2qE_0\sin\theta_0/(mL)$ [le forze elettriche producono dei momenti rispetto al centro di massa (il polo per la rotazione considerata) che hanno lo stesso valore e segno. Infatti la forza sulla carica positiva tende a far ruotare l'asta nel senso antiorario di figura, e lo stesso fa la forza sulla carica negativa. I bracci delle forze valgono $(L/2)\sin\theta_0$ mentre il momento di inerzia del sistema vale $I = \Sigma m_i r_i^2 = mL^2/2$. Ricordando che l'equazione del moto rotazionale è $\tau = I\alpha$ si ottiene la soluzione; si noti che il moto rotazionale che ne deriva ha verso antiorario in figura e quindi tende a far diminuire il valore di θ; pertanto è opportuno porre un segno negativo davanti all'espressione dell'accelerazione angolare]

   b) In seguito all'accensione del campo elettrico si osserva che l'asse della molecola prende ad oscillare attorno alla posizione di equilibrio $\theta = 0$. Supponendo che l'angolo iniziale θ_0 sia molto piccolo (al punto che $\sin\theta_0 \sim \theta_0$), come si esprime il periodo T di questa oscillazione? [Suggerimento: ricordate altri sistemi oscillanti ed il loro trattamento matematico!]

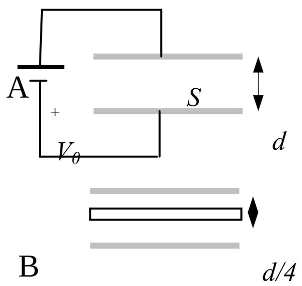
   T = ... $2\pi(mL/(2qE_0))^{1/2}$ [sulla base della risposta al quesito precedente possiamo scrivere l'equazione del moto di rotazione nella forma $\alpha = -(2qE_0/(mL))\sin\theta \sim -(2qE_0/(mL))\,\theta$, dove θ rappresenta un valore angolare generico (ma sempre piccolo, essendo in modulo minore di θ_0). Ricordando che, per definizione, è $\alpha = d^2\theta/dt^2$ è immediato riconoscere che l'equazione differenziale che abbiamo scritto rappresenta un moto periodico (oscillatorio) con pulsazione $\Omega = (2qE_0/(mL))^{1/2}$ da cui, notando che $T = 2\pi/\Omega$, la soluzione]

   c) Come si scrive la funzione $U(\theta)$ che rappresenta l'**energia potenziale** (di natura elettrostatica) del dipolo elettrico quando questo forma un angolo θ generico rispetto alla direzione del campo (cioè all'asse Y)? Commentate con chiarezza sul procedimento adottato e sulle sue implicazioni.

   $U(\theta)$ = ... $-qE_0L\cos\theta$

   Commento: .... il lavoro fatto dal campo elettrico per portare l'asse del dipolo dalla posizione di equilibrio theta = 0 alla posizione angolare θ generica θ = 0 vale $L_E = qE_0L(\cos\theta\text{-}1)$;
infatti la forza elettrica ad esempio sulla carica
positiva è diretta lungo Y ed ha valore costante ed uniforme pari a qE_0. Lo spostamento (lineare!) in questa direzione vale $\Delta s = (L/2)(\cos\theta\text{-}1)$, per cui il lavoro corrispondente si ottiene con una semplice moltiplicazione. Lo stesso risultato si ottiene per la carica negativa e quindi il lavoro complessivo ha l'espressione determinata. La variazione di energia potenziale elettrostatica è, per definizione, $\Delta U_E = -L_E$. Per esprimere la funzione energia $U(\theta)$, che è legata alla differenza di energia potenziale tramite una costante,
si può porre pari a zero l'energia nella posizione theta=pigreco/2, ottenendo il risultato riportato. Si noti
che la posizione θ=0 , che sappiamo essere di equilibrio, corrisponde giustamente ad un minimo dell'energia. Notate poi che, derivando l'espressione rispetto a θ, si riottiene l'espressione del momento delle forze che abbiamo prima derivato in altro modo]

4. Un condensatore è costituito da due sottili armature piane di materiale conduttore che hanno sezione di area S = 2.0x10^2 cm^2 e sono disposte parallelamente fra loro a distanza reciproca d = 1.0 cm come in figura A. Inizialmente il condensatore è collegato a un generatore di differenza di potenziale V_0 = 1.0x10^3 V per un tempo sufficiente a raggiungere condizioni stazionarie. Quindi **il generatore viene scollegato** e tra le



armature viene inserita una lastra di materiale conduttore (globalmente neutro), di spessore *d/4* ed area *S* (la lastra viene infilata in modo da "coincidere" perfettamente con le armature e da essere parallela a queste, come rappresentato in figura B; la distanza tra le facce della lastra e le armature non è nota, se necessario fate delle ipotesi ragionevoli). [Usate il valore ε_0 =8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto, che è il "mezzo" compreso tra le armature; tenete conto che le armature e la piastra sono molto estese, e quindi trascurate gli "effetti ai bordi"]

a) Quanto vale la differenza di potenziale V' tra l'armatura superiore e quella inferiore dopo che è stata inserita la lastra? [Supponete che si sia raggiunta una nuova condizione di equilibrio]

V' = …………………………………… = ……V $E(d-d/4) = 3\,(V_0/d)d/4 = 3\,V_0/4 = 7.5\text{x}10^2$ V [per definizione è $\Delta V = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$, dove gli estremi di integrazione sono punti sulle due armature. Dopo l'inesrimento della lastra l'integrale incontra tre diverse regioni: tra l'armatura inferiore e la lastra (regione I), all'interno della lastra (regione II), tra la lastra e l'armatura superiore (regione III). Poiché il campo nella lastra è nullo all'equilibrio, l'integrale di linea nella regione II fa zero. Inoltre applicando il teorema di Gauss ad una scatola cilindrica con le superfici di base rispettivamente nelle regioni I e III, si trova che il campo elettrico ha lo stesso valore nelle regioni I e III (la scatola racchiude una carica nulla). Di conseguenza, detto E il modulo del campo nelle regioni I e III, si ha $V' = E(d-d/4)$, essendo $(d-d/4)$ l'altezza delle regioni I e III (notate che conta l'altezza totale e quindi non fa differenza se la lastra viene collocata più in alto o più in basso tra le armature) . D'altra parte E è generato dalla stessa distribuzione di carica sulle armature che era stata determinata inizialmente dal generatore, per cui $E = V_0/d$, da cui la soluzione]

b) Quanto vale la differenza di energia elettrostatica ΔU_E tra la configurazione finale (quella con la lastra inserita) e quella iniziale (senza lastra)? [State attenti ad esprimere anche il segno giusto]

ΔU_E = …………………………………… = ……….. J $Q^2/(2C')-Q^2/(2C) = (Q/2)(V'-V_0) = (\varepsilon_0 SV_0/(2d))((3/4)V_0 - V_0) = -\,\varepsilon_0 SV_0^2/(8d) = 2.2\text{x}10^{-6}$ J [l'energia elettrostatica immagazzinata in un condensatore all'equilibrio può essere espressa come $CV^2/2 = Q^2/(2C) = QV/2$, da cui la soluzione, dove si è fatto uso di $Q = CV_0 = \varepsilon_0 SV_0/d$ valida per un condensatore ad armature piane e parallele, e della risposta al quesito precedente; il segno negativo indica che l'energia elettrostatica diminuisce. Usando principi di bilancio energetico questo vuol dire che la lastra tende ad essere risucchiata nello spazio tra le armature]

c) Supponete ora che un resistore elettrico di resistenza R = 3.0 Mohm venga collegato tra le armature. Quanto vale il "tempo caratteristico di scarica" τ del sistema così realizzato?

τ = …………………………………… = ……….. s $RC' = 4R\varepsilon_0 S/(3d) = 7.0\text{x}10^{-5}$ s [la capacità C' del condensatore comprensivo della lastra al suo interno è per definizione $C' = Q/V'$, dove la carica Q, come già osservato, è quella determinata da generatore e capacità C del condensatore iniziale, cioè $Q = CV_0 = \varepsilon_0 SV_0/d$. Sostituendo e tenendo conto della risposta al quesito a) si ottiene $C' = (4/3)\varepsilon_0 S/d$. Da qui moltiplicando per il valore della resistenza R si determina la costante tempo τ che rappresenta il tempo necessario affinché la carica sulle armature diminuisca fino ad un valore pari ad $1/e$ della carica iniziale, con e base dei logaritmi naturali]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 18/6/2008 Firma: