CdL STCi.a. □ / Chim.c.a. □ – ESAME DI FISICA GENERALE – 9/7/2008

Nome e cognome: ………………………………………………………… Matricola: ……………

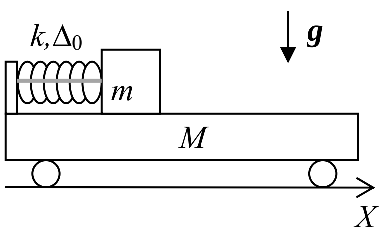
Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

-- **PARTE 1**

1. In un esperimento di ionizzazione di vapori, uno ione positivo di massa m = 60 u.m.a. e carica Z = 1 si muove sotto l'azione di un campo elettrico (esterno, cioè creato da chissà chi e in che modo!) **disomogeneo** diretto nel verso positivo dell'asse X di un sistema di riferimento. Tale campo presenta un'intensità dipendente dalla coordinata x secondo la legge: $E(x) = E_0(1+x/d)$, con d = 3.0 cm ed E_0 costante (incognita). Si sa che all'istante t_0 = 0 lo ione si trova a passare per l'origine del sistema di riferimento avendo una velocità v_0 = 4.0x10^3 m/s orientata nel verso positivo dell'asse X. [Supponete trascurabili gli effetti della forza peso e ogni forma di attrito; ricordate che 1 u.m.a. = 1.6x10^{-27} kg e che la carica unitaria vale e = 1.6x10^{-19} C]
   a) Come si scrive l'equazione del moto dello ione nel campo elettrico citato? [Dovete limitarvi a scrivere la **funzione** $a(x)$ che descrive l'accelerazione dello ione in funzione della coordinata x da lui occupata; **non** usate valori numerici per questa risposta, che va espressa usando i parametri letterali noti del problema]
   $a(x)$ = …………………………………… $(e/m)(E_0(1+x/d))$ [semplicemente dalla $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ con $\mathbf{F}=e\mathbf{E}(x)$]

   b) Supponete ora che un'osservazione sperimentale suggerisca che, raggiunta la posizione $x' = d$ (con d introdotto precedentemente!), la velocità dello ione valga v''= 5.0x10^3 m/s. Quanto deve valere la costante E_0 che compare nell'espressione del campo elettrico? [Suggerimento: rispondete senza risolvere l'equazione del moto! Può farvi comodo ricordare che, per una variabile generica ξ, si ha $\int \xi^m d\xi = \xi^{m+1}/(m+1)$, valida per $m \neq -1$]
   E_0 = …………………………………… ~ .... V/m $3m(v'^2-v_0^2)/(ed)$ = 5.4x10^2 V/m [non essendoci forze dissipative si può applicare il principio di bilancio energetico che conviene qui scrivere nella forma $\Delta E_K = (m/2)(v'^2-v_0^2) = L_E$. Il lavoro della forza elettrica, che è quella che fornisce l'accelerazione allo ione, è $L_E = \int_0^d eE(x)dx = eE_0(\int_0^d dx + \int_0^d (x/d)dx) = eE_0(d+d/2)$, da cui la soluzione]

2. Un sistema è costituito da un carrello di massa M = 25 kg che può muoversi con attrito trascurabile nella direzione (**orizzontale**) X e da un blocco di massa $m = M/5$ = 5.0 kg che può scorrere con attrito trascurabile sul piano del carrello stesso. Una molla di massa trascurabile e costante elastica k = 24 N/m collega il blocco con una "sponda" del carrello; inizialmente carrello e blocco sono fermi e la molla è mantenuta compressa per un tratto Δ_0 = 50 cm da un filo inestensibile (di massa trascurabile), come rappresentato in figura. All'istante t_0=0 il filo viene tagliato e si osserva che sia il blocco che il carrello si mettono in movimento. [Considerate il problema come unidimensionale, cioè tale che tutti gli spostamenti avvengano in direzione X ed usate l'asse indicato in figura]



   a) Quanto valgono le velocità v' e V' rispettivamente del blocco e del carrello che si misurano (rispetto al suolo) quando la molla assume la propria lunghezza di riposo? [Notate che alla lunghezza di riposo la molla non ha energia potenziale elastica]
   v' = …………………………………… = ………….. m/s $\Delta_0(k/(m(1+m/M)))^{1/2}$ = 1.0 m/s [il sistema è isolato lungo la direzione di interesse (orizzontale) e quindi si conserva la quantità di moto totale: $0=mv'+MV'$, da cui $V'=-(m/M)v' = -v'/5$, dove si è usato $M=m/5$.. D'altra parte non essendoci termini dissipativi si conserva l'energia meccanica del sistema; inizialmente l'energia è solo di tipo elastico, essendo gli oggetti tutti fermi, mentre all'istante considerato essa è solo di tipo cinetico, essendo la molla alla sua lunghezza di riposo, cioè: $(k/2)\Delta_0^2 = (m/2)v'^2+(M/2)V'^2 = (m/2)(v'^2+5V'^2)$, dove si è usato $M = 5m$. Combinando le due espressioni si ottiene la risposta]
   V' = …………………………………… = ………… m/s $-(m/M)v' = -v'/5$ = 0.20 m/s [vedi sopra]

   b) Quanto vale lo spostamento $\Delta X'$ del carrello misurato rispetto alla posizione iniziale nell'istante in cui la molla assume la lunghezza di riposo? [Per il segno, fate riferimento all'asse indicato in figura]
   ΔX= …………………………………… = …….. m $-m\Delta_0/(m+M)=-\Delta_0/6$ = 8.3x10^{-2} m [essendo il sistema isolato ed essendo i suoi componenti inizialmente fermi, il centro di massa del sistema non si muove durante l'intera evoluzione temporale della dinamica. Pertanto $0=\Delta x_{CM}=(m\Delta x+M\Delta X)/(m+M)$, da cui $\Delta X = -(m/M)\Delta x$. D'altra parte lo spostamento $\Delta x'$ del blocco **relativo** al carrello può essere facilmente dedotto notando che esso è pari alla compressione iniziale della molla, cioè $\Delta x'=\Delta_0$ (infatti la molla assume la sua lunghezza di riposo quando la sua compressione è nulla); lo spostamento del blocco rispetto all'asse di riferimento, solidale al piano su cui si muove il carrello, vale $\Delta x=\Delta x'+\Delta X$ (dalla regola di composizione vettoriale degli spostamenti, osservando che ΔX è, come si verificherà tra breve, negativo). Quindi $\Delta X=-(m/M)(\Delta_0+\Delta X)$, da cui la soluzione]

c) Quanto vale l'istante t' in cui si verifica la situazione considerata sopra, cioè la molla assume la sua lunghezza di riposo? [Considerate il primo istante in cui ciò si verifica: infatti il moto è **periodico** ed esistono infiniti istanti in cui la molla passa per la sua lunghezza di riposo!]

t':= …………………………………… ~ ……. s $\pi(\mu/k)^{1/2}/2$~0.65 s [l'equazione del moto **relativo** del carrello rispetto al blocco recita $a_{rel}=-(k/\mu)\Delta(t)$, con μ massa relativa, cioè $1/\mu=1/m+1/M=6/M$. Si verifica facilmente che questa equazione del moto è quella di un moto armonico con pulsazione $\omega = (k/\mu)^{1/2}$. Nel corso di questo moto armonico, la molla assume (per la prima volta) la propria lunghezza di riposo, cioè la condizione $\Delta(t')=0$, all'istante $t'=T/4$, dove il periodo vale $T=2\pi/\omega$, da cui la soluzione]

--- **PARTE 2**

3. Avete una sottile sbarretta cilindrica **omogenea** di sezione S = 1.0 cm^2 e lunghezza L = 10 cm realizzata con un materiale che ha densità di massa **uniforme** $\rho_M = 6.0\text{x}10^3$ kg/m^3. Un estremo della sbarretta è solidale all'asse di un motorino elettrico che, una volta messo in moto, permette alla sbarretta di compiere un movimento di rotazione su un piano **orizzontale**. Inizialmente tutto (motorino e sbarretta) è fermo; all'istante t_0=0 il motorino viene azionato ed inizia a fornire una potenza **costante** P = 10 W alla rotazione della sbarretta. [Considerate **trascurabile** ogni forma di attrito e gli effetti della forza peso, che sono annullati dall'asse del motorino]

a) Quanto vale la velocità angolare ω' della sbarretta all'istante t' = 10 s? [Per il calcolo può farvi comodo ricordare che, per una variabile generica ξ, si ha $\int\xi^m d\xi = \xi^{m+1}/(m+1)$, valida per $m\neq-1$]

ω' = …………………………………… = ……… rad/s $(6Pt'/(\rho_M L^3 S))^{1/2}$=1.0x10^2 rad/s [non essendoci forze di attrito, il lavoro L_M del motorino viene impiegato unicamente per la variazione di energia cinetica della sbarretta, cioè $L_M = P(t'-t_0) = (I/2)\omega'^2$, dove abbiamo tenuto in conto del fatto che la potenza fornita dal motorino è costante e che l'energia cinetica ha solo natura rotazionale. Per il calcolo occorre esprimere il momento di inerzia I della sbarretta per rotazioni rispetto ad un suo estremo. Supponendo di suddividere la sbarretta in tanti clementini $dV=Sdx$ (in questo calcolo si immagina di disporre la sbarretta con il suo asse in direzione X), si ha $I = \int_0^L \rho_M S x^2\, dx = \rho_M S L^3/3$, da cui la soluzione]

b) Immaginate ora che il materiale di cui è costituita la sbarretta sia un buon conduttore elettrico e che nella regione in cui si trova la sbarretta in rotazione sia presente un campo magnetico esterno **costante ed uniforme** diretto perpendicolarmente al piano di rotazione (cioè diretto verticalmente) e di modulo B_0 = 1.0x10^{-2} T. In queste condizioni si misura una differenza di potenziale V' tra gli estremi della sbarretta. Quanto vale V'? [Eseguite il calcolo riferendovi all'istante t', quando la sbarretta ha velocità angolare ω' determinata al punto precedente; esprimete il **modulo** della differenza di potenziale richiesta]

V' = …………………………………… = ……….. V $\omega' L^2 B_0/2$ = 5.0x10^{-3} V [le cariche elettriche presenti nella sbarretta subiscono gli effetti della forza di Lorentz, che, su una singola carica q, si esprime come $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v}\text{x}\boldsymbol{B_0}$. Vista la geometria del problema (la velocità giace sul piano di rotazione ed il campo è ortogonale al piano stesso) si ha $F = qvB_0$. La velocità dipende dalla posizione, essendo esprimibile come $v = \omega R$, con R distanza dall'asse di rotazione, cioè dall'estremo della sbarretta solidale all'asse del motorino. Questa forza determina effetti simili a quelli di un campo elettrico (campo impresso), che ha espressione, in modulo, $E^* = \omega' R B_0$. A questo campo è associata una differenza di potenziale che, in modulo, si esprime come $|V| = \int_0^L E^* dR$, da cui la soluzione]

4. Un lungo solenoide è realizzato con un numero N = 1000 di spire di sottile filo elettrico di **resistività trascurabile** avvolte in modo da formare una superficie cilindrica di raggio a=1.0 cm ed altezza h=50 cm (h>>a). Il solenoide è collegato ad un generatore di corrente la cui intensità $I(t)$ è variabile nel tempo secondo la legge $I(t) = I_0(1-t/\tau)$, con I_0 = 20 A e τ = 0.10 s. [Usate il valore $\mu_0 = 4\pi\text{x}10^{-7}$ T m/A per la permeabilità magnetica del vuoto]

a) Come si esprime l'intensità del campo magnetico $B(t)$ all'interno del solenoide in funzione del tempo t? [Sfruttate il fatto che il solenoide è molto lungo e **non** usate valori numerici per questa risposta, limitandovi ad esprimere in modo letterale i parametri noti del problema]

$B(t)$ = …………………………………… $\mu_0 N I_0(1-t/\tau)/h$ [applicando il teorema di Ampere al solenoide (supposto infinitamente lungo) si trova il risultato. Il campo considerato, visto che il solenoide è "molto lungo", si può ritenere uniforme e diretto assialmente (il campo esterno al solenoide è nullo). Ovviamente questa procedura suppone di poter impiegare un approccio "quasi-stazionario", basato sull'uso di equazioni di Maxwell per condizioni stazionarie o con variazioni temporali limitate, come si verifica nel caso considerato]

b) Come si esprime la differenza di potenziale $V(t)$ misurata ai capi del solenoide? Qual è il suo valore V' all'istante $t' = \tau$? [Per la prima risposta **non** dovete usare valori numerici; per la seconda sì]

$V(t)$ = …………………………………… $-d\Phi(\boldsymbol{B}(t))/dt = N\pi a^2 \mu_0 N I_0/(h\tau)$ [per la legge di Faraday, notando che il flusso "concatenato" con il solenoide è, essendo il campo uniforme, pari a $B\pi a^2 N$, dove si è tenuto in debito conto il numero N delle spire con cui il flusso è concatenato; il segno positivo della differenza di potenziale sta ad indicare che essa è tale da generare una corrente che a sua volta produce un campo magnetico (costante!) i cui effetti tendono a sommarsi a quelli del campo generato dalla corrente $I(t)$. Infatti per la legge di Lenz il flusso del campo magnetico all'interno del solenoide, considerato come somma di quello generato dalla corrente e di quello indotto, tende a rimanere costante e quindi il "controcampo" prodotto deve essere parallelo al campo $B(t)$ determinato sopra. Osservate che questo risultato presuppone che non ci sia una differenza di potenziale "spontaneamente" presente ai capi del generatore di corrente, situazione che rispecchia quella dei generatori di corrente ideali. Nella realtà, poiché la resistenza del filo di cui è fatto il solenoide potrà essere difficilmente ritenuta nulla, così come la resistenza "interna" del generatore, ci sarà anche un contributo legato alle resistenze del sistema e alla caduta di potenziale relativa]

V' = …………………………………… = ……… V $N\pi a^2 \mu_0 N I_0/(h\tau)$ = 1.6x10^{-2} V [vedi sopra]

c) Commentate su direzione, verso e intensità del vettore di Poynting che "interessa" il solenoide. [Ricordate che il vettore di Poynting è definito come $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\text{x}\boldsymbol{B}/\mu_0$]

Commento: ……………………………………… sulla base delle risposte date in precedenza si ha che il campo magnetico è assiale (con verso determinato dalla regola della mano destra, versione "ciao ciao", ed intensità decrescente linearmente con il tempo secondo la legge determinata sopra). Per determinare il campo elettrico, osserviamo che sicuramente sarà presente un campo elettrico all'interno del filo del solenoide, dato che in esso scorre corrente. Questo campo ha la stessa direzione e verso della corrente, dunque, se le spire sono realizzate in modo "denso", ha direzione praticamente tangenziale. Notiamo però che, non essendo noti i parametri geometrici del filo e non conoscendone la resistività, questo campo non è determinabile in modo diretto. Inoltre, se si suppone che il filo elettrico sia "molto sottile", il campo magnetico all suo interno, che non si può determinare, può essere considerato nullo, e quindi il campo in questione non contribuisce al vettore di Poynting. Diversa è la situazione per il campo elettrico indotto dalla variazione temporale del campo magnetico. Infatti questo campo è presente in tutto il solenoide; esso è responsabile per la forza elettromotrice determinata dalla legge di Faraday. Nella risposta al punto precedente si è determinato questo campo lungo la linea di circuitazione che comprende il filo del solenoide. Dato che il campo magnetico è uniforme, calcolando il flusso su una superficie contenuta all'interno del solenoide ugualmente si conclude che esiste una forza elettromotrice indotta, e quindi un campo elettrico indotto. L'intensità di questo campo non sarà uniforme (facendo i conti dovrebbe venire che esso varia linearmente con la distanza dall'asse del solenoide), ma, sulla base della risposta precedente, si potrà concludere che esso è costante nel tempo (all'interno dell'intervallo considerato!). Per ragioni di simmetria, la direzione di questo campo è approssimativamente tangenziale (vedi sopra), mentre il suo verso, per Lenz, è concorde a quello della corrente prodotta dal generatore. Di conseguenza il vettore di Poynting sarà non nullo all'interno del solenoide, non uniforme (cresce linearmente con il raggio) e non costante (cresce linearmente con il tempo); la direzione sarà radiale ed il verso uscente dal solenoide. Ricordando che il flusso del vettore di Poynting è rappresentativo della potenza scambiata, questa osservazione è in accordo con il fatto che l'energia (magnetica) immagazzinata nel volume racchiuso dal solenoide durante il processo considerato diminuisce con il proseguire del tempo.

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 9/7/2008 Firma: