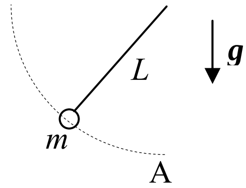
# CdL STCi.a. □ / Chim.c.a. □ – ESAME DI FISICA GENERALE – 18/7/2008

**Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………**

*Istruzioni:* ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------ **PARTE 1**

1. Un piccolo sasso di massa $m$ = 200 g è attaccato all'estremità di una fune inestensibile e di massa trascurabile, la cui lunghezza è $L$ = 1.00 m. L'altro estremo della fune è vincolato ad un perno conficcato in una parete rigida verticale: in questo modo il sasso può compiere un movimento, con **attrito trascurabile**, su un piano verticale, come rappresentato in figura. In particolare, in opportune condizioni la traiettoria compiuta dal sasso è circolare; infatti si osserva che quando il sasso passa per la posizione A indicata in figura (il punto "più basso" della traiettoria) con una velocità angolare $\omega_A \geq \omega_{MIN}$, esso percorre una traiettoria circolare completa (cioè fa un "giro della morte"). [Usate il valore $g$ = 9.80 m/s$^2$ per il modulo dell'accelerazione di gravità che è, ovviamente, diretta verticalmente verso il basso]




   a) Quanto vale $\omega_{MIN}$?

   $\omega_{MIN}$ = …………………………………… = .......... rad/s  $(5g/L)^{1/2}$ = 7.0 rad/s  [affinché il sasso, supposto puntiforme, possa percorrere il giro della morte occorre che esso abbia una velocità angolare ω', misurata nel punto **"più alto"** della traiettoria, almeno tale che $m\omega'^2L = mg$. In queste condizioni, infatti, l'accelerazione centripeta necessaria per percorrere l'orbita circolare viene fornita dalla sola forza peso, mentre la tensione della fune aggiusta il suo valore in modo da annullarsi. Per considerazioni di bilancio energetico, cioè di conservazione dell'energia meccanica, si vede subito che $(m/2)(\omega'^2-\omega_{MIN}^2)L^2+mg2L=0$, da cui $\omega'^2=\omega_{MIN}^2-4g/L$. Inserendo questa espressione nella condizione sopra stabilita si ottiene la soluzione]

   b) Supponendo ora che il sasso passi per la posizione A con una velocità angolare $\Omega = (4/5)\omega_{MIN}$, con $\omega_{MIN}$ determinato nella risposta precedente, si osserva che esso non percorre più per intero una traiettoria circolare. quanto vale l'altezza massima $h$, misurata rispetto alla quota del punto A, raggiunta dal sasso? Per semplicità, rispondete al quesito supponendo che, nel punto di massima altezza, il sasso sia completamente **fermo**. Spiegate poi, in modo breve ma chiaro, se ritenete ragionevole questa approssimazione.

   $h$ = …………………………………… = .......... m  $\Omega^2L^2/(2g) = (8/5)L$ = 1.60 m  [per la conservazione dell'energia meccanica, $0 = -(m/2)\Omega^2L^2+mgh$, da cui la risposta. Notate che la forza di tensione che la fune esercita sul sasso (questa forza è attiva solo finché la traiettoria è circolare, dato che poi la fune perde la sua tensione) non compie lavoro essendo ortogonale allo spostamento]

   Spiegazione: ...…………………………………… l'approssimazione non è ragionevole. Infatti nel punto di massima altezza il sasso potrà avere una componente di velocità orizzontale. Questa componente può essere calcolata; infatti, dato che la fune può trasferire una forza al sasso, e quindi modificare la sua velocità, solo se rimane tesa, la componente orizzontale della velocità sarà pari a quella che il sasso nell'istante in cui comincia a deviare dalla traiettoria circolare. In tale istante la componente radiale della forza peso è in grado di fornire da sola l'accelerazione centripeta al sasso, cioè, detta ω'' la velocità angolare del sasso subito prima che esso inizi a deviare dalla traiettoria circolare ed α il valore dell'angolo formato dal raggio vettore che punta sul sasso rispetto alla verticale (misurato in modo che α = 0 quando il sasso è nella posizione A) deve essere $\omega''^2L = g\sin\alpha$ In tale istante, come suggerito dalla trigonometria, il sasso si trova ad una quota $h'$ (misurata rispetto al punto A) data da: $h' = L(1+\sin\alpha)$ . Per la conservazione dell'energia meccanica si ha allora: $\omega''^2=\Omega^2-2g/h'=\Omega^2-2g/(L(1-\sin\alpha))$. Deve quindi verificarsi: $g\sin\alpha/L=\Omega^2-2g/(L(1-\sin\alpha))$. Questa equazione consente, con un certo grado di difficoltà algebrica, di determinare il valore dell'angolo α al quale avviene il "distacco", cioè per il quale la traiettoria comincia a non essere più circolare. La velocità orizzontale $v_X$ in questo punto si trova ancora usando un po' di trigonometria; si ha infatti, in modulo, $v_X=\omega''L\cos\alpha$. Poiché da questo istante in poi non agiscono sul sasso forze in direzione orizzontale, questa è la velocità orizzontale del sasso quando esso raggiunge il punto di massima altezza; quindi l'equazione di conservazione dell'energia scritta nella soluzione al quesito precedente dovrebbe essere modificata aggiungendo il termine $(m/2)v_X^2$. Di conseguenza il punto di massima altezza si troverebbe più in basso rispetto a quanto calcolato. Notate infine che tutto il ragionamento si basa sul fatto che il "distacco" avvenga dopo che il sasso ha percorso almeno un quarto di circonferenza, altrimenti il punto di massima altezza apparterrebbe ancora alla circonferenza (precisamente all'arco corrispondente al suo primo quarto). Che questo non si verifichi con i dati del problema si può facilmente trovare notando che, per la conservazione dell'energia meccanica, la velocità angolare del sasso nel alla fine del primo quarto di circonferenza è $\omega'''=(\Omega^2-2g/L)^{1/2}=(6g/(5L))^{1/2}$ > 0. Pertanto la fune è ancora tesa quando il sasso raggiunge il punto considerato, dovendo fornire al sasso stesso un'accelerazione centripeta.

2. Due piccoli oggetti di massa $m_A = m$ ed $m_B = 3m$, con $m$ nota, sono uniti da una molla di massa trascurabile, costante elastica $k$ (nota) e lunghezza di riposo $L_0$ (incognita). I due oggetti possono muoversi con **attrito trascurabile** lungo un asse $X$ **orizzontale** $X$. All'istante $t_0$ = 0 si osserva che entrambi gli oggetti si muovono con la stessa velocità $v_0$ (la velocità è la stessa sia in modulo che in verso!), mentre le loro posizioni sono; $x_{0A}$.= 0; $x_{0B} = d_0$, con $d_0$ nota. Si osserva poi che ad un certo istante $t_1$ (incognito) le posizioni dei due oggetti sono tali che la loro distanza è $x_{1B} - x_{1A} = d_0$, valore di distanza iniziale (nota!). [Nessuna forza esterna è applicata al sistema dei due oggetti in direzione orizzontale; inoltre l'istante $t_1$ è il **primo** di una (infinita) serie di istanti in cui si verifica la condizione considerata]

   a) Come si esprime, in funzione dei parametri letterali noti del problema, l'istante $t_1$?

   $t_1$ = …………………………………… $\pi(3m/k)$ [l'equazione del moto relativo del sistema recita $a_{REL} = -(k/\mu)(d(t)-L_0)$ , con $d(t)=x_B(t)-x_A(t)$ distanza tra gli oggetti e μ massa ridotta: $1/\mu=1/m_A+1/m_B=(4/3)(1/m)$. Il moto relativo è quindi armonico, con pulsazione ω

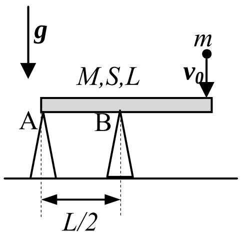
$= (k/\mu)^{1/2}=2(k/(3m))^{1/2}$.La condizione che si verifica all'istante $t_1$, in cui la distanza assume di nuovo il valore iniziale, si realizza dopo un intervallo temporale pari al periodo $T=2\pi/\omega$, da cui la soluzione]

b) Come si esprime la posizione $x_{1A}$ occupata dall'oggetto di massa $m_A$ all'istante $t_1$? [Spiegate **bene** in brutta il procedimento impiegato!]

$x_{1A}$ = …………………………………… $X_0+v_0t_1-(3/4)d_0 = v_0t_1$, con $t_1$ determinato sopra [essendo il sistema palesemente isolato nella direzione $X$ (non agiscono forze esterne), si conserva la quantità di moto, ovvero il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme con velocità costante $V_{CM} = (m_Av_0+m_Bv_0)/(m_A+m_B) = v_0$. All'istante $t_0 = 0$ il centro di massa si trova nella posizione $X_0 = m_Bd_0/(m_A+m_B) = 3d_0/4$. All'istante $t_1$ la sua posizione sarà $X_1 = X_0+v_0t_1 = (m_Ax_{1A}+m_Bx_{1B})/(m_A+m_B)=(x_{1A}+3x_{1B})/4$. D'altra parte si sa che $x_{1B}=x_{1A}+d_0$, da cui, risolvendo, esce la soluzione. Notate che la soluzione trovata indica corrisponde ad uno spostamento di moto rettilineo uniforme (a velocità $v_0$) dell'oggetto di massa A, anche se in realtà il suo moto è ben diverso!]

--------------------------------------------------------------------------------------------------------------- **PARTE 2**

3. Una sottile trave **omogenea** di massa $M$ = 10 kg, sezione di area $S$ = 50 cm$^2$ e lunghezza $L$ = 2.0 m si trova in equilibrio sopra due supporti "puntiformi" (denominati A e B) solidali ad un pavimento rigido e indeformabili; tali supporti sono in grado di generare sulla trave forze di reazione che hanno solo componenti verticali. I due supporti contattano la trave ad una sua estremità ed al punto di mezzo, come rappresentato in figura. Nelle condizioni di equilibrio considerate, la trave ha direzione **orizzontale**. [Usate il valore $g$ = 9.8 m/s$^2$ per il modulo dell'accelerazione di gravità]




a) Quanto valgono, in modulo, le forze $\boldsymbol{F_A}$ ed $\boldsymbol{F_B}$ che i due supporti esercitano sulla trave? Spiegate brevemente su quali considerazioni basate il procedimento per la determinazione di queste forze

$F_A$ = …………………………………… = ……….. N  0

$F_B$ = …………………………………… = ……….. N  $Mg$ = 98 N

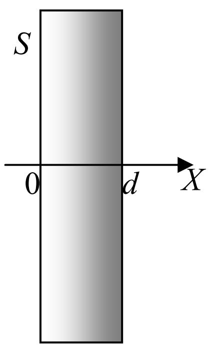
Spiegazione: …………………………………… l'equilibrio traslazionale impone $F_A+F_B = Mg$; l'equilibrio rotazionale rispetto ad un polo collocato, ad esempio, in A stabilisce che $F_BL/2 = MgL/2$ , dove si è sfruttato il fatto che il centro di massa della trave è collocato alla metà della sua lunghezza, in un punto la cui verticale passa per B; da qui esce $F_B = Mg$ , e quindi $F_A = 0$. Notate che, in sostanza, l'equilibrio (sia rotazionale che traslazionale) è garantito dal solo appoggio in B, dato che B coincide con la posizione (orizzontale) del centro di massa.

b) Immaginate ora che un chiodo, di massa $m$ = 100 g, venga sparato in direzione verticale sull'estremo "di destra" della trave (vedi figura); sapendo che la velocità del chiodo, subito prima dell'impatto, è diretta verticalmente ed ha modulo $v_0$ = 50 m/s e che il chiodo rimane conficcato nella trave, quanto vale la velocità angolare ω con cui il sistema trave+chiodo comincia a ruotare **subito dopo** l'arrivo del chiodo?

ω=…………………………………~………..rad/s

$mv_0(L/2)/(ML^2/3+mL^2/4)=6mv_0/(L(4M+3m))\sim(3/2)(m/M)(v_0/L)$ = 0.37 rad/s [dopo l'arrivo del chiodo la trave (comprensiva del chiodo che ci si è conficcato dentro) comincia a ruotare attorno al polo B. Il fenomeno è un urto anelastico dove, però, non si conserva la quantità di moto a causa della presenza del vincolo B, che impedisce la traslazione del centro di massa. Infatti il sistema non è isolato in direzione verticale, non soltanto a causa della forza peso (che, non essendo impulsiva, non è in ogni caso capace di modificare la quantità di moto del sistema nella breve durata dell'evento di urto), ma anche per la presenza della forza $\boldsymbol{F_B}$, che invece può avere carattere impulsivo (si suppone che i supporti siano sufficientemente rigidi). Tuttavia nell'urto si conserva sicuramente il momento angolare complessivo calcolato rispetto ad un asse passante per B, dato che la forza generata dal vincolo B ha braccio nullo rispetto a tale polo. Prima dell'urto il momento angolare vale (in modulo, la sua direzione è uscente dal foglio, rispetto alla figura) $mv_0L/2$; dopo l'urto esso vale $I_{tot}\omega$ , con $I_{tot}$ momento di inerzia complessivo del sistema. Il momento di inerzia complessivo è dato dalla somma del momento di inerzia $I_{CM}=ML^2/3$ per la trave omogenea (per rotazione attorno ad un asse passante per il centro di massa) e del momento di inerzia del proiettile conficcato, $I'=m(L/2)^2$. Numericamente si può osservare come questo termine contribuisca in modo trascurabile]

4. Una lastra molto estesa e sottile di materiale non conduttore porta al suo interno una distribuzione di carica volumica **disomogenea**. Come indicato in figura, in cui la lastra è vista "di profilo", le superfici (facce) "di base" della lastra, che hanno area $S$ = 0.10 m$^2$, sono ortogonali rispetto all'asse $X$. Lo spessore della lastra è $d$ = 1.0 mm (si ha evidentemente $d$ << $S$) e la carica complessiva contenuta nella lastra vale $Q$ = 1.0x10$^{-5}$ C. Si sa che la densità di carica dipende dalla sola coordinata $x$, in particolare aumentando linearmente da 0 fino al valore $\rho_0$ (incognito) quando si passa dalla faccia "di sinistra" in figura, collocata ad $x$ = 0, alla faccia "di destra", che si trova ad $x$ = $d$. Si sa anche che $E(x)$=0 per $x \leq 0$. [Considerate $\varepsilon_0$ = 8.8x10$^{-12}$ F/m la costante dielettrica sia all'interno che al di fuori della lastra; supponete **trascurabili gli "effetti ai bordi"**]




Disegno non in scala!

a) Come si scrive l'espressione del campo elettrico $\boldsymbol{E}(x)$ nelle regioni 0 <$x$<$d$ e $x$>$d$ (cioè dentro la lastra e "alla destra" della lastra stessa)? [**Non** usate alcun valore numerico per questa risposta, che va espressa in funzione dei parametri letterali noti del problema; indicate in brutta direzione e verso del campo, nell'ipotesi che si possano trascurare gli effetti ai bordi]

$E(x) =$ …………………………………… per $0 < x < d$ $Q_{int}(x)/(S\varepsilon_0) - E(x \le 0) = (\int_0^x \rho(x) S \mathrm{d}x)/(S\varepsilon_0) = (\rho_0/(d\varepsilon_0)) \int_0^x x \, \mathrm{d}x = (2Q/(2Sd^2\varepsilon_0))x^2 = Qx^2/(Sd^2\varepsilon_0)$ [se si trascurano gli effetti ai bordi, come lecito viste le dimensioni della lastra, il sistema ha simmetria piana. Quindi il campo elettrico è diretto lungo $X$ (nel verso positivo, essendo positiva la carica) e dipende solo dalla coordinata $x$. Il suo valore si ottiene da Gauss, usando una scatola a forma di parallelepipedo di cui le due facce di base, con superficie pari ad $S$, sono poste una ad $x \le 0$ e l'altra ad una qualche coordinata $x$ generica all'interno della lastra. Per la soluzione occorre poi esprimere la densità $\rho(x)$. Sulla base della descrizione riportata nel testo, deve essere $\rho(x) = \rho_0 \, x/d$ e tenere in debito conto la condizione $E(x \le 0) = 0$. La costante $\rho_0$ si determina dalla condizione che l'intera carica all'interno della lastra sia pari a $Q$, che fornisce $\rho_0 = 2Q/(Sd)$, da cui la soluzione]

$E(x) =$ …………………………………… per $x > d$ $Q/(S\varepsilon_0)$ [è il campo generato da una carica complessiva $Q$ distribuita con simmetria piana, come se fosse su una lastra. A questo risultato si arriva anche applicando Gauss come suggerito sopra, avendo cura di porre la faccia di destra della scatola nella regione $x > d$]

b) Quanto vale la differenza di potenziale $\Delta V$ tra la faccia "di sinistra" e quella "di destra" in figura? [Per azzeccare il segno giusto, che è richiesto per la soluzione, tenete presente che si intende $\Delta V = V(x=0) - V(x=d)$]

$\Delta V =$ …………………………………… = …… V $-\int_0^x E(x) \mathrm{d}x = -Qd^3/(3Sd^2\varepsilon_0) = -Qd/(3S\varepsilon_0) = 3.8 \times 10^3$ V [dalla definizione di differenza di potenziale, tenendo sempre presente che il campo è nullo per $x \le 0$ ed usando l'espressione di sopra per il campo elettrico nella lastra. Il segno negativo indica che la faccia di destra si trova ad un potenziale maggiore rispetto a quella di sinistra]

---

**Nota**: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 18/7/2008 Firma: