Corso di Laurea STC ☐ Chimica C.A. ☐ – ESAME DI FISICA GENERALE - 22/4/2009

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Istruzioni: ***riportate i risultati, sia letterali che numerici, se richiesti, in questo foglio; allegate "brutte copie" o altri documenti che ritenete utili.*** *Le risposte non adeguatamente giustificate non saranno prese in considerazione*

1. Due ioni con carica unitaria positiva q e massa rispettivamente m_1 e $m_2=m_1/2$ si muovono **l'uno contro l'altro** lungo l'asse X di un sistema di riferimento. Inizialmente i due ioni si trovano a grandissima distanza (praticamente "infinita") tra di loro e le loro velocità sono $v_{01}=|v_0|$ e $v_{02}=-|v_0|$ (le due velocità sono uguali in modulo ed opposte in segno), con $|v_0| = 3.0\text{x}10^3$ m/s. Si osserva che i due ioni si avvicinano l'un l'altro fino a raggiungere una distanza minima d_{MIN} (ovviamente essi non si fermano a tale distanza minima, ma subito dopo averla raggiunta la distanza relativa aumenta). [**Trascurate ogni effetto della forza peso** e ogni eventuale forza di attrito]
   a) Quanto vale la velocità v_1 dello ione di massa m_1 misurata nell'istante in cui i due ioni raggiungono la minima distanza relativa?
   v_1 = …………………….. = ……….. m/s $\quad v_0(m_1-m_2)/(m_1+m_2)=v_0/3=$ 1.0x10^3 m/s [non agendo altre forze se non quelle (interne) di interazione elettrica fra le due cariche, il sistema dei due ioni è isolato. Dunque si conserva la quantità di moto, cioè, ad ogni istante del processo, deve essere $(m_1-m_2)|v_0| = m_1v_1 + m_2v_2$, dove si è scritta correttamente (in termini di segni!) la quantità di moto iniziale del sistema. D'altra parte nell'istante di massimo avvicinamento la velocità **relativa** dei due ioni deve essere nulla, altrimenti essi continuerebbero ad avvicinarsi o si starebbero allontanando. Dunque $v_1=v_2$, da cui la soluzione]

   b) Sapendo che q = 1.6x10^{-19} C e che la somma delle masse degli ioni vale (m_1+m_2)=3.2x10^{-26} kg, qual è il valore della distanza minima d_{MIN}? [Può farvi comodo ricordare che la forza di interazione elettrica tra due cariche puntiformi q si esprime, in modulo, come $|F| = \kappa_E q^2/x^2$, essendo κ_E = 9.0x10^9 N m^2/C^2 e x la distanza relativa (generica) tra le particelle; può anche farvi comodo ricordare che, per una variabile generica ξ, si ha $\int \xi^n\, d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$,valida per $n \neq -1$]
   d_{MIN} = …………………….. = ……….. m $\quad 2\kappa_E q^2/((v_0^2-v_1^2)\,(m_1+m_2)) = 9\kappa_E q^2/(4v_0^2\,(m_1+m_2))$ = 1.8x10^{-9} m [per il bilancio energetico (nella forma del cosiddetto teorema delle forze vive(, visto che sul sistema non agiscono altre forze all'infuori di quella elettrica di interazione (repulsione!), si può scrivere $L_E = \Delta E_K = (m_1/2)v_1^2+(m_2/2)v_2^2 - ((m_1+m_2)/2)v_0^2 = ((m_1+m_2)/2)(v_1^2-v_0^2)$, dove si è sfruttata la condizione sulle velocità che si verifica nell'istante di massimo avvicinamento. Il lavoro L_E è quello esercitato dalla forza elettrica nel processo che vede inizialmente i due ioni a distanza "infinita" fra loro, e "finalmente" alla distanza d_{MIN} . Ricordando la definizione di lavoro (e tenendo conto in modo opportuno del fatto che la forza di interazione è repulsiva), si ha $L_E = \int_\infty^{dMIN} (-\kappa_E q^2/x^2)dx = -\kappa_E q^2/d_{\text{MIN}}$. Mettendo tutto insieme ed usando anche il risultato trovato alla soluzione del quesito precedente si ottiene la risposta]

2. Un cilindro **pieno ed omogeneo** di massa m = 2.0 kg e raggio R = 10 cm si trova, inizialmente fermo, sulla sommità di un piano inclinato di altezza h = 15 m e inclinazione $\theta = \pi/3$ rispetto all'orizzontale. Ad un dato istante, il cilindro viene lasciato libero di scendere sul piano inclinato, partendo con velocità iniziale nulla. Il piano inclinato è **scabro** e si verifica che l'attrito tra superficie laterale del cilindro e superficie del piano è tale da garantire moto di **rotolamento puro**, cioè il cilindro si muove rotolando **senza strisciare**. [Usate il valore g = 9.8 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità. Ricordate che $cos(\pi/3)$ = ½ e $sin(\pi/3) \sim 0.87$ e trascurate ogni forma di attrito diversa da quella che provoca il moto di rotolamento puro]
   a) Quanto vale la velocità v_{CM} che il centro di massa del cilindro raggiunge al termine del piano inclinato?
   v_{CM} = ……………………….. ~ ……….. m/s $\quad (2mgh/(m+I/R^2))^{1/2} = 2(gh/3)^{1/2}$ = 14 m/s [sul cilindro non agiscono forze dissipative se non l'attrito responsabile del rotolamento. Poiché questo avviene senza strisciamento, si tratta di attrito statico che non dà dissipazione di energia. Pertanto si conserva l'energia meccanica, cioè $0 = \Delta U_G+\Delta E_K = -mgh + (m/2)v_{CM}^2 + (I/2)\omega^2$. D'altra parte il rotolamento puro impone una condizione geometrica tra velocità del centro di massa e velocità angolare di rotazione: $v_{CM} = \omega R$. Inoltre per un cilindro pieno omogeneo si ha $I = mR^2/2$, da cui la soluzione]

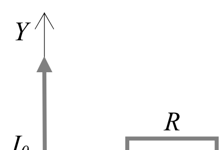
   b) Sapendo che il coefficiente di attrito statico tra superficie del piano inclinato e superficie laterale del cilindro vale μ_S = 0.80, verificate **quantitativamente** che il moto di rotolamento puro sia effettivamente possibile. [Fate una bella e chiara discussione in brutta]
   Verifica e discussione: ……………………….. l'equazione del moto traslazionale del centro di massa del cilindro, scritta nel riferimento del piano inclinato (orientato verso il basso) recita $a_{CM} = gsin\theta - F_A/m$, con F_A intensità della forza di attrito effettivamente necessaria per avere rotolamento puro. D'altra parte l'equazione del moto di rotazione del cilindro si scrive $\alpha = F_AR/I$, essendo la sola forza di attrito in grado di provocare il rotolamento (le altre forze, peso e reazione vincolare, hanno braccio nullo). Nel rotolamento puro si ha poi $\alpha = a_{CM}/R$. Dunque si ha un sistema di tre equazioni in tre incognite che può essere risolto per F_A ottenendo: $F_A = mgsin\theta/3$. D'altra parte per definizione di coefficiente di attrito statico deve anche essere $F_A \leq \mu_S N = \mu_S mgcos\theta$, da cui si ricava la seguente condizione su μ_S: $\mu_S \geq tg\theta/3$. Questa condizione è effettivamente verificata, e dunque il moto di rotolamento puro è effettivamente possibile.

   c) Supponete ora che alla base del piano inclinato sia presente un tratto **orizzontale** perfettamente liscio, cioè con coefficiente di attrito (sia statico che dinamico) praticamente nullo. Quanto varrà la velocità angolare ω' del cilindro quando esso si trova a percorrere questo tratto? [State attenti a valutare tutte le possibili conservazioni delle varie grandezze in gioco e spiegate bene, in brutta, cosa vi aspettate che succeda!]
   ω' =……………………….. ~ …….. rad/s $\quad v_{CM}/R$ = 140 rad/s quando il cilindro si trova sul piano liscio, su di esso non agisce più alcuna forza di attrito. Pertanto il momento delle forze esterne è nullo e dunque si conserva il momento angolare. Di conseguenza il cilindro continua a routare attorno al proprio asse con la velocità angolare che aveva acquistato nella discesa lungo il piano inclinato, da cui la soluzione. Notate che, ovviamente, anche quantità di moto ed energia meccanica (cioè cinetica) si conservano, essendo il cilindro isolato lungo l'asse orizzontale (quello del moto) e non essendoci forze dissipative]

3. Un condensatore elettrico collegato ad un generatore di differenza di potenziale V_0 = 10 V ha una capacità C = 8.8 pF ed è costituito da una coppia di armature piane e parallele di superficie A = 100 cm^2 con del vuoto al loro interno. Il sistema si trova inizialmente in condizioni stazionarie.
   a) Quanto valgono la distanza d tra le armature e la densità di carica superficiale σ della lastra collegata al polo positivo? [Usate il valore ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto]
   d = ………………………………… = ... m $\quad \varepsilon_0\, A/C$ = 1.0x10^{-2} m
   σ = ………………………………… = ... C/m^2 $\quad V/(d\,\varepsilon_0) = CV/A$ = 8.8x10^{-9} C/m^2

   b) Ad un dato istante il generatore viene scollegato e al suo posto viene collegato tra le armature del condensatore un resistore di resistenza R = 10 kohm. Quanto vale l'energia E "dissipata" per effetto Joule dalla resistenza nell'**intero** processo di scarica del condensatore? [Supponete di aspettare un tempo molto lungo e non fate confusione tra energia e potenza!]
   E = ………………………………… = ... J $\quad CV^2/2$ = 8.8x10^{-10} J [dal bilancio di energia: l'energia elettrostatica conservata nel condensatore viene completamente dissipata dalla resistenza; notate che la scarica è un processo asintotico, e quindi la risposta ha senso solo se si aspetta un tempo che tende all'infinito!

4. Un lungo filo elettrico disposto lungo l'asse Y di un sistema di riferimento cartesiano è percorso da una corrente elettrica stazionaria di intensità I_0 diretta nel verso indicato in figura. "A fianco" del filo si trova una spira quadrata di lato L fatta



di un filo elettrico la cui resistenza complessiva vale R. La spira, che giace sul piano XY del riferimento, viene mossa da un **operatore esterno** che la fa spostare a velocità **costante** di modulo v_0 in direzione X (positiva). Ad un dato istante un lato della spira si trova a distanza L rispetto al filo (osservate la figura per capire la situazione!).

a) Come si scrive la forza elettromotrice ε indotta sulla spira nell'istante preso in considerazione? [Non occorre una risposta numerica: date una risposta "letterale" tenendo in conto i dati noti del problema in forma letterale; indicate con μ_0 la permeabilità magnetica del vuoto]

ε = …………………………… $v_0\, \mu_0\, I_0/(4\pi)$ = - 3.1x10[11] C/m[3] [tenendo conto dell'espressione della forza di Lorentz su una carica generica appartenente al filo della spira, il campo "impresso" sul lato "sinistro" della spira (riferito alla figura) vale $E^*_S = v_0 B_S$, essendo B_S il campo magnetico prodotto dal filo nella posizione occupata da quel lato della spira. Usando il teorema di Ampere si trova, in modulo, $B_S = \mu_0\, I_0/(2\pi L)$, da cui $E^*_S = v_0\, \mu_0\, I_0/(2\pi L)$. Con analoghe considerazioni si ottiene, per il lato di destra, $E^*_D = v_0\, \mu_0\, I_0/(2\pi(2L))$. La forza elettromotrice indotta si ottiene facendo la circuitazione del campo impresso sull'intera spira; nella circuitazione "contano" soltanto i due lati considerati, visto che per gli altri la forza di Lorentz, e quindi il campo impresso, ha direzione ortogonale ai lati stessi. Prendendo (arbitrariamente) come positivo il verso di circuitazione oraria, e notando che il campo impresso è uniforme sull'intera lunghezza dei lati considerati, si ottiene: $\varepsilon = L(E^*_S - E^*_D)$, da cui la soluzione. Allo stesso risultato si può anche giungere usando la legge di Faraday, al prezzo, però, di una complicata integrazione sulla superficie necessaria per esprimere il flusso del campo magnetico attraverso la spira]

b) Come si scrive, in modulo, la forza meccanica complessiva F che si esercita sulla spira nello stesso istante? Quali sono la sua direzione ed il suo verso? [Anche se ci agiscono forze, la spira è da considerarsi indeformabile]

F = …………………………… $(\varepsilon/R)\, \mu_0\, I_0/(4\pi) = v_0\, (\mu_0\, I_0/(4\pi))^2/R$

Direzione e verso: .... verso negativo dell'asse X di figura [la forza elettromotrice indotta sulla spira corrisponde ad una corrente di intensità $I = \varepsilon/R$. Usando nel modo corretto la regola della mano destra e facendo riferimento alla figura, si verifica che questa corrente circola in senso orario all'interno della spira. Poiché essa si trova immersa nel campo elettrico generato dal filo, si verificheranno delle forze di natura magnetica. In particolare su un elementino (generico) $d\mathbf{l}$ di lunghezza della spira, si avrà una forza (infinitesima) $d\mathbf{F} = I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$, con $\mathbf{B}$ campo magnetico generato dal filo. Facendo riferimento alla figura, è facile notare che questo campo è entrante nel foglio; dunque la forza sarà sempre diretta ortogonalmente rispetto ai quattro lati della spira, con un verso che "esce" (per intendersi!) dalla spira stessa. Sui due lati orizzontali (rispetto alla figura) le forze si bilanceranno, dato che, per ogni elementino di questi lati, il campo magnetico assume lo stesso valore in modulo. Invece sui due lati verticali il campo, come già discusso, ha valore diverso, e quindi la forza risultante avrà direzione X. Il verso si ottiene notando che il campo è più intenso sul lato di sinistra. L'espressione del modulo della forza, infine, si ottiene usando l'espressione del campo magnetico come fatto in precedenza, notando ancora una volta che esso è uniforme su ogni elementino dei singoli lati, e quindi l'integrazioe è immediata]

Nota: acconsento che l'esito della prova venga pubblicato sul sito web del docente, http://www.df.unipi.it/~fuso/dida, impiegando come nominativo le ultime quattro cifre del numero di matricola, oppure il codice: | | | | | (4 caratteri alfanumerici).

Pisa, 22/4/2009 Firma: