ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 11/07

1. Un semplice modello "classico" per l'atomo di idrogeno prevede che esso sia composto da un elettrone, di carica $q = -e = -1.6\text{x}10^{-19}$ C e massa $m = 9.0\text{x}10^{-31}$ kg, che ruota con velocità uniforme e costante attorno ad un protone dotato di carica $Q = e = 1.6\text{x}10^{-19}$ C e massa $M = 1.6\text{x}10^{-27}$ kg.
   a) Sapendo che il raggio dell'orbita vale $R = a_0 = 5.0\text{x}10^{-11}$ m, quanto vale l'**energia cinetica** E_{K0} dell'elettrone? [Trascurate ogni effetto dovuto alla gravità, ed usate il valore $\kappa = 9.0\text{x}10^9$ Nm^2/C^2 per la costante della forza elettrica]
   E_{K0} = …………………………….. = ... J $(m/2)v^2 = (m/2)\kappa e^2/(\mu R) \sim \kappa e^2/(2a_0) = 2.3\text{x}10^{-18}$ J [la forza elettrica, di modulo $F_e = \kappa e^2/R^2$, è la causa fisica che fornisce l'accelerazione centripeta, $a_C = v^2/R$, all'elettrone in rotazione uniforme. Notate che nel sistema di due elementi che si sta considerando l'accelerazione centripeta deve essere considerata come accelerazione **relativa** dell'elettrone rispetto al protone (che non è specificato sia fisso nello spazio!), cioè deve essere $F_e = \mu a_C$, con μ **massa ridotta** del sistema, che vale $1/\mu = 1/m + 1/M$. Tuttavia, a causa della grande differenza di massa tra protone ed elettrone, si ha $1/\mu \sim 1/m$, da cui la soluzione]

   b) A causa di una perturbazione esterna (che non specifichiamo!), il raggio dell'orbita diventa $R' = 2a_0 = 1.0\text{x}10^{-10}$ m. Quanto vale il lavoro L_E compiuto dalle forze di natura elettrica nel corso del processo? [Può farvi comodo ricordare la seguente regolina di integrazione indefinita per una variabile ξ generica ($n \neq -1$): $\int \xi^n \, d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$]
   L_E = …………………………… = ... J $\int_R^{R'} \kappa(-e^2)/r^2 \, dr = \kappa e^2 [1/r]_R^{R'} = \kappa (e^2/a_0)(1/2-1) = -\kappa e^2/(2a_0) = -E_{K0} = -2.3\text{x}10^{-18}$ J   [dalla definizione di lavoro per una forza (conservativa) non uniforme!]

2. Un sistema è costituito da due masse puntiformi m unite tra loro da una molla di massa trascurabile, lunghezza a riposo l e costante elastica k. Inizialmente la molla è tenuta compressa per una lunghezza Δ da un filo, e la congiungente le due masse si trova in direzione orizzontale.
   a) Riferendovi ad un sistema di riferimento con l'origine nel punto medio della congiungente le due masse, l'asse X orizzontale e l'asse Y verticale e diretto verso il basso, quali sono le coordinate x_{CM} ed y_{CM} del centro di massa del sistema?
   x_{CM} =: ……………………………………0 [il CM è fra le due masse]
   y_{CM} =: ……………………………………0 [per come si è scelto il sistema di riferimento]

   b) Ad un dato istante, che porremo $t = 0$, questo filo si rompe, e, contemporaneamente, il sistema viene lasciato cadere da una certa altezza sotto l'azione della gravità $\boldsymbol{g}$. Come si scrivono le equazioni del moto $x_{CM}(t)$ ed $y_{CM}(t)$ **del centro di massa** per $t > 0$? [Trascurate ogni forma di attrito]
   $x_{CM}(t)$ =: ……………………………………0   [non ci sono forze lungo X]
   $y_{CM}(t)$ =: ……………………………………$(g/2)t^2$ [per come si è scelto il sistema di riferimento]

   c) Come si scrivono, in funzione dei dati del problema (e del tempo), le forze $F_{1X}(t)$ ed $F_{2X}(t)$ che agiscono rispettivamente sulle masse 1 e 2? (Chiamate $x_1(t)$ ed $x_2(t)$ le coordinate orizzontali delle due masse, considerate solo le componenti orizzontali delle forze, cioè solo le forze dovute alla compressione/estensione della molla, e state attenti ai segni)
   $F_{1X}(t)$ =: ……………………………………$k[l-(x_1(t)-x_2(t))]$ [il termine tra parentesi quadre rappresenta, in modulo, la compressione/estensione della molla, ed il segno è quello giusto; si chiama massa 1 quella che si trova "a destra" dell'origine, 2 quella che si trova "a sinistra"]
   $F_{2X}(t)$ =: ……………………………………$-k[l-(x_1(t)-x_2(t))]$ [vedi sopra]

   d) Come si scrive l'equazione del moto relativo lungo X del sistema, ovvero l'equazione per l'accelerazione relativa $a_{REL,x}(t) = a_{2,x}(t) - a_{1,x}(t)$?
   $a_{REL,x}(t)$ =: …………………………………… $a_{2X}(t) - a_{1X}(t) = F_{2X}(t)/m_2 - F_{1X}(t)/m_1 = k[(x_1-x_2-l)/m_2-(l-x_1+x_2)/m_1] = (2k/m)((x_1-x_2)-l)$ [la soluzione ottenuta è la stessa che si ottiene considerando l'equazione del moto **relativo** $\boldsymbol{F_{INT}} = \mu \, \boldsymbol{a_{REL}}$, con $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ **massa ridotta** del sistema]

3. In un esperimento di collisioni fra particelle cariche, un protone (massa $m = m_A$ e carica $q = e$) viene inviato contro una particella alfa (massa $M = 4m_A$ e carica $Q = 2e$). Le due particelle **inizialmente** si trovano a **distanza relativa così grande** che l'interazione elettrica può essere considerata **trascurabile**, e si muovono

lungo l'asse X di un sistema di riferimento essendo dotate di velocità rispettivamente $v = v_0$ e $V = - v_0$. Ogni forma di attrito o dissipazione ed ogni forza diversa dall'interazione elettrica (interna al sistema!) sono **trascurabili** ed il processo può essere considerato unidimensionale (la dinamica si svolge solo lungo l'asse X). Le particelle si avvicinano quindi l'un l'altra fino a trovarsi alla distanza relativa minima d_{MIN} per poi successivamente riallontanarsi. [I valori numerici rilevanti per il problema sono: $m_A = 1.6\times10^{-27}$ kg, $e = 1.6\times10^{-19}$ C, $v_0 = 2.0\times10^2$ m/s; la costante della forza elettrica è $\kappa_E = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9.0\times10^9$ N m^2/C^2]

a) Quanto vale la velocità v_{CM} del **centro di massa del sistema** nell'istante in cui viene raggiunta la minima distanza relativa?

v_{CM} = ... = ... m/s $(mv+MV)/(m+M) = -(3/5)v_0 = -1.2\times10^2$ m/s [il processo è un urto (centrale) fra due particelle; non essendoci forze esterne si conserva la quantità di moto totale del sistema e la velocità del centro di massa del sistema è costante durante tutto il processo. In particolare, essa rimane sempre al valore iniziale, da cui la soluzione]

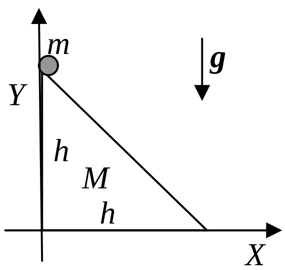
b) Come si esprime il lavoro L che la forza elettrica di interazione esegue dall'istante iniziale a quello in cui viene raggiunta la minima distanza relativa? [Non dovete dare una risposta numerica, ma solo esprimere L in funzione dei dati del problema e della distanza minima d_{MIN}]

L = ... $-\Delta U_{ELE} = -\kappa_E qQ/d_{MIN} = -\kappa_E 2e^2/d_{MIN}$ [si è tenuto conto che inizialmente la distanza tra le cariche è praticamente infinita, e quindi l'energia elettrica è praticamente nulla]

c) Quanto vale, in modulo, la distanza minima relativa d_{MIN} fra le due particelle? [Suggerimento: attenti a considerare le risposte dei punti precedenti!]

d_{MIN} = ... = ... m $5\kappa_E e^2/(4m_A v_0^2) = 4.5\times10^{-6}$ m [non essendoci cause dissipative, si ha: $L = \Delta E_K = (m/2+M/2)v_{CM}^2 - (m/2)v^2 - (M/2)V^2 = (5/2)m_A v_{CM}^2 - (5/2)m_A v_0^2 = -(5/2)m_A v_0^2(1-9/25) = -(5/2)m_A v_0^2(16/25) = -(8/5)m_A v_0^2$. Attenzione a considerare il fatto che alla distanza relativa minima le particelle non sono ferme, ma si muovono entrambi alla velocità del centro di massa del sistema, essendo nulla la loro velocità relativa Il risultato si ottiene usando l'espressione di L ed il valore di v_{CM} determinati prima]

4. Una massa puntiforme m si trova ferma sulla sommità di un piano inclinato la cui sezione è costituita da un triangolo rettangolo isoscele con cateti lunghi h (vedi figura). La massa può scivolare **senza attrito** lungo il piano. Il piano inclinato è poggiato su un piano orizzontale su cui può scorrere a sua volta **senza attrito.** Per le risposte usate un sistema di riferimento cartesiano XY centrato sul vertice retto del piano inclinato, come in figura (ovviamente questo sistema di riferimento è solidale con il piano orizzontale, cioè rimane fisso durante l'eventuale moto del piano inclinato). La massa del piano inclinato vale M e, rispetto a questo sistema di riferimento, il centro di massa del **solo piano inclinato** si trova nella posizione di coordinate $X_{CM} = h/2$ e $Y_{CM} = h/2$ (la posizione lungo Z non è rilevante).



a) Quali sono le coordinate X_{TOT} ed Y_{TOT} che individuano la posizione sul piano del centro di massa dell'**intero sistema** (piano+massa puntiforme)?

X_{TOT} = ... $MX_{CM}/(M+m) = Mh/(2(M+m))$

Y_{TOT} = ... $(MY_{CM}+mh)/(M+m) = h(M/2+m)/(M+m)$ [per definizione]

b) La massa viene lasciata libera di muoversi sotto l'azione della gravità e si osserva che anche il piano inclinato si muove (in direzione orizzontale). Lungo quale direzione il sistema può essere considerato "isolato"? Commentate:

.... la direzione X, lungo la quale non agiscono forze esterne al sistema (che sono solo verticali, dato che sono costituite da forza peso e reazione vincolare che il piano orizzontale esercita verticalmente sulla base del piano inclinato)

c) In quale posizione X' si viene a trovare il centro di massa del **solo piano inclinato** quando la massa puntiforme raggiunge il fondo del piano inclinato stesso?

X' = ... $X_{TOT}-(h/2)(m/(m+M)) = (h/2)(M-m)(M+m)$ [il sistema è isolato lungo l'asse X, ed essendo il sistema fermo all'inizio, la coordinata orizzontale del **centro di massa totale** del sistema rimane inalterata e pari costantemente a X_{TOT} . Deve quindi essere: $X_{TOT} = (mx'+MX')/(m+M)$, dove x' è la coordinata della massa puntiforme quando questa si trova alla fine del piano inclinato. Attenzione, perché tale coordinata è misurata nel sistema di riferimento fisso: tenendo conto che in un riferimento solidale al piano la massa parte da 0 e percorre uno spazio orizzontale h, e che questo riferimento si trova spostato di una lunghezza pari alla differenza tra posizione orizzontale finale ed iniziale del CM del **piano inclinato**, si ha $x'=h + X'-X_{CM} = h/2+ X'$. Manipolando algebricamente si ha la risposta]