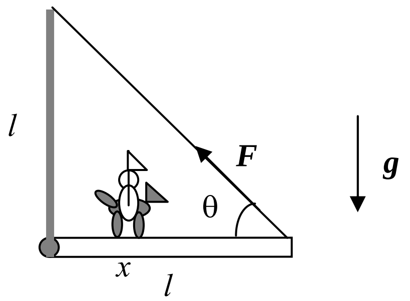
ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 16/07

1. Un cavaliere medievale, di massa complessiva M = 500 Kg, percorre un ponte levatoio, di materiale omogeneo, lunghezza l = 5.00 m, e massa m = 100 Kg, che è incernierato senza attriti ad un suo estremo, mentre all'altro estremo è fissato tramite una catena inestensibile (di massa trascurabile) alle pareti del castello, in un punto che si trova ad una distanza verticale l = 5.00 m al di sopra del perno (vedi figura). Per lo svolgimento del problema, considerate il cavaliere (con cavallo e armatura) come un punto materiale.



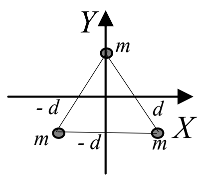
   a) Detta x la coordinata del cavaliere lungo il ponte levatoio, come si scrive la funzione $F(x)$ che rappresenta la dipendenza del modulo della tensione della catena con la posizione x?
   $F(x)$ = ………………………………………….. $(Mg\ x + mgl/2)/(l \sin\theta)$, essendo θ = 45 gradi l'angolo rappresentato in figura

   b) Sapendo che il carico massimo che la catena può sopportare prima di spezzarsi vale in modulo F' = 5000 N,quanto vale la coordinata x' a cui arriva il cavaliere prima che succeda il disastro?
   x' = …………………………………... = ……… m $F'l \sin\theta / (Mg) - ml / (2M)$ = 3.11 m
   [risolvendo l'equazione scritta sopra per x e considerando una forza pari a F']

   c) Tenendo conto che il ponte levatoio è ben approssimato da un'asta omogenea che ruota attorno ad un asse passante per una sua estremità, quanto vale **l'accelerazione angolare** α del ponte subito dopo la rottura della catena? [Se proprio non volete calcolarvelo, ricordate che il momento di inerzia di un'asta omogenea di massa m e lunghezza l vale, in questo caso, $I = ml^2/3$]
   α = …………………………………... = ……… rad/s^2 $(mgl/2 + Mgx')/I$ = 21.2 rad/s^2
   [dalla legge del moto di rotazione di un corpo rigido, tenendo conto che, subito dopo la rottura della catena, i momenti delle forze sono solo quelli dovuti alla forza peso del ponte, applicata al suo centro di massa, e del cavaliere, applicata con un braccio pari a x']

   d) Il cavaliere comincerà a cadere verso il basso, ed il ponte a compiere una rotazione. Inizialmente (subito dopo la rottura della catena), quanto valgono in modulo le **accelerazioni lineari** A ed a rispettivamente del cavaliere e dell'estremità del ponte?
   A = …………………………………... = ……… m/s^2 g = 9.80 m/s^2 [è un grave in caduta libera!]
   a = …………………………………... = ……… m/s^2 $\alpha\, l$ = 106 m/s^2 [>> g !!]

2. Il sistema materiale di figura è costituito da tre corpi puntiformi identici di massa m = 0.60 kg, tenuti insieme da un sistema di aste **rigide di massa trascurabile**. Nel sistema di riferimento indicato in figura, i tre corpi giacciono sul piano z = 0 e si trovano rispettivamente nelle posizioni $\mathbf{r_1} = (-d,-d)$, $\mathbf{r_2} = (0, d)$, $\mathbf{r_3} = (d,-d)$, con d = 30 cm. [Notate che i tre corpi si trovano ai vertici di un triangolo isoscele "indeformabile"]



   a. Qual è la posizione $\mathbf{r}_{CM} = (x_{CM}, y_{CM})$ del centro di massa del sistema?
   x_{CM}= …………………………………… = ………… m $(m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3)/(m_1+m_2+m_3)$ = 0
   [come si poteva vedere dal fatto che l'asse Y è un asse di simmetria del sistema]
   y_{CM}= …………………………………… = ………… m $(m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3)/(m_1+m_2+m_3)=-d/3=$- 0.10 m

   b. Quanto vale il momento di inerzia I_0 per una rotazione del sistema attorno all'asse Z?
   I_0 = …………………………………… = ………… kg m^2 $m_1r_1^2+m_2r_2^2+m_3r_3^2= m_1(x_1^2+y_1^2)+m_2(x_2^2+y_2^2)+m_3(x_3^2+y_3^2)= 5md^2$ = 0.27 kg m^2

   c. Quanto vale il momento di inerzia I' per una rotazione del sistema attorno ad un asse parallelo all'asse Z e passante per la posizione del corpo 1?
   I' = …………………………………… = ………… kg m^2 $m_1r'^2_1+m_2r'^2_2+m_3r'^2_3= m_1((x_1-x_1)^2+(y_1-y_1)^2)+ m_2((x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2)+ m_3((x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2)= 0 + m_25d^2 + m_34d^2 = 9md^2$ = 0.49 kg m^2 [notate che la massa 1 non "contribuisce" al momento di inerzia, dato che la sua distanza dall'asse di rotazione, r'_1, è in questo caso nulla; tuttavia $I'>I_0$ dato che le masse m_2 ed m_3 vengono a trovarsi relativamente distanti dall'asse di rotazione]

d. Quanto vale il momento di inerzia I_{CM} per una rotazione del sistema attorno ad un asse parallelo all'asse Z e passante per la posizione del centro di massa? [Ricordate che potete anche usare il "teorema degli assi paralleli", che recita: $I = I_{CM} + MD^2$, dove il significato dei vari termini dovete saperlo voi!]

I_{CM} = ………………………………… = ……….. kg m^2 $m_1 r_{CM1}^2 + m_2 r_{CM}^2 + m_3 r_{CM3}^2 = m_1((x_1 - x_{CM})^2 + (y_1 - y_{CM})^2) + m_2((x_2 - x_{CM})^2 + (y_2 - y_{CM})^2) + m_3((x_3 - x_{CM})^2 + (y_3 - y_{CM})^2) = m_1((x_1 - 0)^2 + (y_1 + d/3)^2) + m_2((x_2 - 0)^2 + (y_2 + d/3)^2) + m_3((x_3 - 0)^2 + (y_3 + d/3)^2) = (14/3)\, md^2$ = 0.25 Kg m^2 [il risultato si ottiene ovviamente sia applicando il teorema degli assi paralleli che calcolando direttamente il momento di inerzia rispetto al polo passante per il CM; per il teorema, potete verificare il risultato prendendo notando che deve, per esempio, essere: $I_{CM} = I_0 - 3m(x_{CM}^2 + y_{CM}^2)$, dato che la distanza tra il polo a cui è riferito I_0 (l'origine) e il CM vale $D = (x_{CM}^2 + y_{CM}^2)^{1/2}$ e la massa totale è $M = 3m$]

e. Supponete ora che sui tre corpi agiscano rispettivamente le forze (costanti) $\boldsymbol{F_1} = (-f, 0)$, $\boldsymbol{F_2} = (f, f)$, $\boldsymbol{F_3} = (f, 0)$, con f = 1.8 N. Cosa potete dire del moto del sistema? Quanto valgono l'accelerazione del centro di massa, $\boldsymbol{a_{CM}}$, e l'accelerazione angolare α per rotazioni attorno al centro di massa?

Commento: ……………………………………. il sistema è sottoposto ad un moto di traslazione, dovuto alla risultante delle forze che agiscono sul CM, e di rotazione, dovuto alla presenza di momenti delle forze.

$\boldsymbol{a_{CM}}$ = (……, ……) = ……….. m/s^2 $(\boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{F_3})/(3m) = (f, f)/(3m)$ = (1.0, 1.0) m/s^2 [il CM si muove di moto uniformemente accelerato e traiettoria rettilinea diretta lungo la bisettrice del primo quadrante]

α = ………………………………… ~ ……….. rad/s^2 $(|\tau_1 + \tau_2 + \tau_3|)/I_{CM} = -|\tau_2|/I_{CM} = -2df/(3I_{CM}) = -f/(7md) \sim$ - 1.4 rad/s^2 [dalla legge cardinale del moto rotatorio attorno al CM: $\tau = I_{CM}\,\alpha$, dove τ indica la risultante dei momenti delle forze, che è pari al solo momento τ_2 dato che i momenti delle forze sulle masse 1 e 3 si annullano a vicenda per ragioni di simmetria; notate che il segno negativo è stato aggiunto ad hoc per indicare che l'accelerazione tende a far ruotare il sistema in senso orario. Per il calcolo di τ_2 potete usare la regola del prodotto vettoriale $\tau_2 = \boldsymbol{r_{2CM}} \times \boldsymbol{F_2}$, stando attenti a scrivere nel modo corretto il vettore posizione della massa 2 rispetto al centro di rotazione, $\boldsymbol{r_{2CM}} = \boldsymbol{r_2} + \boldsymbol{r_{CM}}$, e calcolando il prodotto vettoriale ad esempio tramite la "regola del determinante", consigliata quando si conoscono le componenti dei vettori da "moltiplicare" fra loro; notate che l'evoluzione temporale di questo moto non è facilmente deducibile, poichè il momento cambia con il tempo anche se siete in presenza di forze costanti]

3. Un'asta di massa M = 10.0 kg, lunghezza L = 3.00 m e sezione di area A = 10.0 cm^2, è realizzata con un materiale disomogeneo.

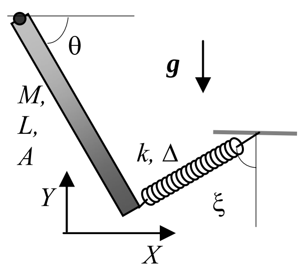
a. Sapendo che, detta x la distanza da un estremo dell'asta, la densità di massa varia in funzione di x secondo la legge $\rho(x) = \rho_0\, x^2/L^2$, quanto vale il coefficiente ρ_0?

ρ_0 = ………………………………… = ……….. kg/m^3 $ML^2/(S \int_0^L x^2 dx) = 3M/(SL)$ = 1.00x10^4 kg/m^3 [per definizione di densità di massa, deve essere $M = \int_{VOL} \rho(x)\, dV = \int_0^L \rho(x)\, S dx = \int_0^L \rho_0 x^2 (S/L^2)\, dx = \rho_0 (S/L^2) \int_0^L x^2\, dx = \rho_0\, SL/3$, dove l'elemento di volume è stato scritto come $dV = Sdx$ coerentemente con la geometria lineare del sistema]

b. A quale distanza x_{CM} misurata rispetto all'estremo $x = 0$ dell'asta si trova il suo centro di massa?

x_{CM} = ………………………………… = ……….. m $(\int_0^L x\, \rho(x)\, S\, dx)/M = \rho_0\, S\, L^2/(4M) = (3M/(SL))(S L^2/(4M)) = 3L/4$ = 2.25 m

c. Supponete ora che questa asta possa ruotare **senza attrito** su un piano verticale e attorno ad un perno passante per il suo estremo x = 0. Supponete anche che all'altro estremo dell'asta sia attaccata una molla, di massa trascurabile e costante elastica k = 30.0 N/m e che l'altro estremo della molla sia vincolato ad un solaio rigido ed indeformabile. La figura rappresenta la situazione di equilibrio, che si verifica quando la molla è diretta **ortogonalmente** all'asta, mentre l'asta forma un angolo θ = 60 gradi rispetto all'orizzontale. Quanto vale l'allungamento Δ della molla in queste condizioni? [Usate il valore numerico g = 9.80 m/s^2 per il modulo dell'accelerazione di gravità]



Δ = ………………………………… = ……….. m $Mg\, x_{CM} \cos\theta / (kL) = 3Mg \cos\theta / (4k)$ = 2.45 m [viene dall'equilibrio dei momenti delle forze rispetto al perno di rotazione, notando che le forze che danno un momento non nullo sono la forza peso Mg, applicata al baricentro e quindi con un braccio $x_{CM}\cos\theta$ rispetto al perno, e la forza elastica, di modulo $k\Delta$ e braccio L , essendo diretta ortogonalmente all'asta]