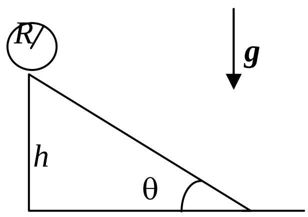
ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 17/07

1. Un cerchione di bicicletta di raggio R = 20 cm e massa M = 0.40 kg (approssimabile come un sottile guscio cilindrico, cioè, in pratica, come una circonferenza su cui è distribuita omogeneamente la massa) è “appesantito” con un piombino, di massa m = 100 g, attaccato in un punto della circonferenza.
   a) Quanto vale il momento di inerzia I_{TOT} del sistema?
   I_{TOT} = …………………………………… = ... kg m^2 $(M+m)R^2$ = $2.0\mathrm{x}10^{-2}$ kg m^2 [per la definizione di momento di inerzia!]

   b) Indicate ora con θ l’angolo compreso tra il raggio che unisce il centro del cerchione al piombino e la verticale e supponete che il sistema cerchione+piombino sia poggiato su una superficie piana su cui può muoversi senza strisciare, cioè con un moto di **rotolamento puro.** Quanto vale l’angolo (o gli angoli) θ_0 per cui il sistema si trova in equilibrio? Date anche una spiegazione sintetica della risposta.
   θ_0 = …………………………………… = ... gradi 0
   Spiegazione sintetica della risposta: …………………………………… il CM del sistema si troverà lungo il raggio considerato, ad una certa distanza dal centro; la posizione θ_0=0 garantisce momento nullo per la forza peso, essendo nullo il braccio, e quindi equilibrio rotazionale; l’eq. traslazionale del centro di massa è anch’esso garantito grazie alla presenza delle forze di reazione vincolare esercitate dalla superficie di appoggio sul sistema

   c) Se il cerchione viene fatto ruotare di un **piccolo** valore θ’ rispetto alla posizione di equilibrio, e poi lasciato andare con velocità iniziale nulla, che tipo di moto si determinerà? Commentate:
   ………………………………………………………… non essendo più $\theta = \theta_0$, il momento delle forze rispetto al centro del cerchione sarà $\tau = (m+M)gr_{CM}\sin\theta'$, dove $r_{CM} = mR/(m+M)$ è la distanza tra il centro del cerchione e la posizione del CM, che, come detto, si trova per simmetria lungo il raggio che punta al piombino; questo momento delle forze determina un’accelerazione angolare α del cerchione. Per $\theta << 1$, si ha $\sin\theta \sim \theta$, e, ponendo $\alpha = d^2\theta/dt^2$ e facendo attenzione ai segni, si vede che il moto di rotazione è oscillatorio e periodico; per la condizione di rotolamento puro, questo moto è accompagnato da un moto di traslazione del CM, anch’esso oscillatorio ed ugualmente periodico, essendo $a_{CM} = \alpha R$

2. Un cilindro di massa m e raggio R si trova in quiete sulla sommità di un piano inclinato di altezza h (vedi figura) scabro. Ad un dato istante esso viene lasciato libero di scendere lungo il piano inclinato, e si osserva che compie un moto di **rotolamento puro senza strisciamento**. Il momento di inerzia del cilindro considearto per una rotazione attorno al suo asse vale I (dato del problema). Notate anche che, essendo il cilindro **omogeneo**, il suo centro di massa giace sull’asse.



   a) Disegnate in figura il diagramma delle forze rilevanti per il problema.

   b) Se sussiste la condizione di rotolamento senza strisciamento, che rapporto deve esserci tra velocità del centro di massa del cilindro, v_{CM} , e velocità angolare di rotazione ω? Quanto deve valere il lavoro L_A delle forze di attrito che si sviluppano tra generatrice del cilindro e piano inclinato?
   v_{CM} = ……………………………………..…….. ωR
   L_A = ……………………………………..…….. 0 [non c’è moto relativo!]

   c) Detta v_{CM}’ la velocità del centro di massa quando il cilindro raggiunge la base del piano inclinato, quanto vale l’energia cinetica E_K’ in questa posizione? [Tenete conto della rotazione del cilindro!]
   E_K’ = ……………………………………..…….. $mv_{CM}'^2/2 + I\, v_{CM}'^2/(2R^2)$

   d) Quanto vale v_{CM}’? [Suggerimento: applicate principi di bilancio energetico]
   v_{CM}’ = ……………………………………..…….. $(2mgh\,/\,(m + I\,/\,R^2))^{1/2}$ [da E_K’ = mgh !]

   e) Come si scrivono le equazioni per la forza in direzione parallela al piano inclinato e per i momenti delle forze rispetto all’asse di rotazione? [Suggerimenti: chiamate θ l’angolo del piano inclinato rispetto all’orizzontale, ricordatevi della forza di attrito F_A e tenete conto che, senza strisciamento, tra accelerazione lineare del centro di massa, a_{CM}, ed accelerazione angolare α del cilindro esiste la stessa relazione che c’è tra v_{CM} ed ω - vedi domanda b)]

Francesco Fuso – tel 050 2214305 – e-mail: fuso@df.unipi.it – web page: http://www.df.unipi.it/~fuso/dida

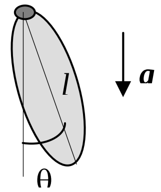
Forze in direzione parallela: $m\, a_{CM}$ = …………………………………..…….. $mg\sin\theta - F_A$
Momenti delle forze: $I\, \alpha$ = ……………………………………..…….. $I\, a_{CM} / R = F_A\, R$

f) Quanto vale a_{CM}?
a_{CM} = ……………………………………..…….. $g \sin\theta / (1 + I/(m R^2))$ [dalla sol. del sistema scritto sopra – notate che questo valore è sempre minore dell'accelerazione nel caso di strisciamento, che sarebbe $g \sin\theta$!]

g) Quanto vale la forza di attrito F_A?
F_A = ……………………………………..…….. $mg \sin\theta\ I / (I + m R^2)$ [dall'ultima delle due eq. del punto g)]

h) E quanto deve valere, al minimo, il coefficiente di attrito statico μ affinché si possa avere rotolamento senza strisciamento?
$\mu \geq$ ……………………………………..…….. $\mathrm{tg}\theta\ I / (I + m R^2)$ [viene tenendo conto del valore di F_A sopra determinato e considerando che deve essere $F_A = \mu N$, con $N = mg\cos\theta$ modulo della reazione vincolare del piano inclinato]

3. Un ellissoide omogeneo di massa m e lunghezza l (vedi figura) può ruotare su un piano verticale attorno ad un perno passante per una sua estremità. Si suppongano trascurabili tutti gli attriti e si assuma pari ad I (noto!) il momento di inerzia.



a) A quale distanza d dal perno (misurata lungo l'asse dell'ellissoide disegnato in figura) si trova il centro di massa dell'ellissoide?.
d = ……………………………………..…….. $l / 2$, per l'omogeneità e simmetria

b) Quanto vale, in funzione dell'angolo θ indicato in figura, il momento τ esercitato dalla forza peso rispetto al perno di rotazione?
τ = ………………………………………… $m\, g\, (l/2) \sin\theta$ [la forza perso è applicata al centro di massa!]

c) Quanto vale, sempre in funzione di θ, l'accelerazione angolare α dell'ellissoide? [segni!!!]
α = ……………………………………..…….. $-\tau / I = -m\, g\, (l/2\, I) \sin\theta$

d) Se l'ellissoide viene spostato "di poco" dalla posizione di equilibrio stabile $\theta = 0$, si osservano delle oscillazioni (è un pendolo che fa piccole oscillazioni!!). Quanto vale la loro pulsazione ω_{PO}?
ω_{PO} = ……………………………………..…….. $(m\, g\, (l/2\, I))^{1/2}$ [ragionate per analogia con il caso di un pendolo costituito da una massa puntiforme m legata ad una corda lunga d che fa piccole oscillazioni…]