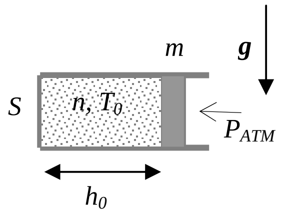
ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 23/07

1. Un campione di gas perfetto monoatomico è contenuto in un recipiente cilindrico di sezione di base S = 8.3 cm^2 dotato di un tappo di massa m = 1.0 kg scorrevole senza attrito. Il recipiente ha pareti (e tappo) fatti di materiale **isolante termico** è disposto con il suo asse in direzione **orizzontale** e la pressione esterna è quella atmosferica, che vale P_{ATM} = 1.0x10^5 Pa. Il sistema è in **equilibrio** quando il gas si trova alla temperatura T_0 = 300 K e la "lunghezza della colonna di gas" vale h_0 = 30 cm (vedi figura).



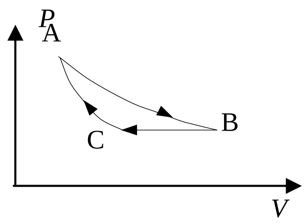
a) Quanto vale il numero di moli n che costituiscono il campione di gas? [Attenti ai trabocchetti, ed usate il valore R = 8.3 J/(K mole) per la costante dei gas perfetti]
n = ……………………………………. = ... moli $P_{ATM} S h_0 / (R T_0)$ = 1.0x10^{-1} moli
[per la legge dei gas perfetti, tenendo conto che, per l'equilibrio del tappo, il gas deve avere la stessa pressione P_{ATM} che si ha all'esterno; notate che, essendo la direzione di possibile spostamento del tappo quella orizzontale, non c'è contributo alla pressione da parte della forza peso che agisce sul tappo (in direzione verticale, compensata dalle pareti laterali del cilindro...)]

b) Si supponga ora che una forza esterna agisca sul tappo in modo da comprimere il gas, facendogli compiere una trasformazione **reversibile**. Sapendo che il lavoro compiuto dalla forza esterna vale L_{EXT} = 3.7x10^2 J e ricordando che **il recipiente non consente scambio di calore con l'esterno** a causa della presenza di materiale termicamente isolante, quanto vale la temperatura T_1 del gas al termine della compressione? [Può farvi comodo ricordare che, per un gas perfetto monoatomico, il calore specifico molare a volume costante vale $c_V = (3/2)R$; fate attenzione al fatto che un lavoro positivo fatto da un operatore esterno sul gas equivale ad un lavoro negativo fatto dal gas ...]
T_1 = ……………………………………. ~ .... K $T_0 + L_{EXT}/(n c_V) \sim 6.0\text{x}10^2$ K
[per il primo principio applicato ad una adiabatica: $L_{GAS} = -\Delta U = -n c_V \Delta T$, dove $L_{GAS} = -L_{EXT}$]

c) Quanto vale la lunghezza della colonna di gas h_1 al termine della compressione?
h_1 = ……………………………………. ~ .... cm $h_0(T_0/T_1)^{1/(\gamma-1)}$ = 3.5 cm [tenendo conto della legge dei gas perfetti, l'equazione delle adiabatiche si può scrivere come $TV^{\gamma-1}$ = *costante*, e, notando che $V = Sh$, si ottiene il risultato]

d) A questo punto il tappo viene bloccato nella posizione che ha raggiunto (cioè la lunghezza della colonna di gas viene fissata al valore h_1) e il recipiente, supposto di **capacità termica trascurabile**, viene messo a contatto termico con un "termostato" (una grande "massa termica") che si trova alla temperatura T_0 = 300 K; trascorso un certo tempo, il sistema si porta all'equilibrio alla temperatura T_0. Supponete che in questo processo il calore possa essere scambiato solo tra il gas e il termostato, cioè trascurate ogni forma di dissipazione di calore verso il mondo esterno. Quanto vale il calore Q che viene scambiato tra gas e termostato?
Q = ……………………………………. ~ .... J $\Delta U = n c_V (T_0 - T_1) = -L_{EXT} = -3.7\text{x}10^2$ J
[l'energia acquistata dal gas durante la compressione adiabatica di cui al punto b) viene rilasciata in forma di calore: per il primo principio applicato ad un'isocora (il volume resta costante!), si ha $Q = \Delta U = n c_V \Delta T$]

3. Una macchina termica che opera con una quantità n di moli di gas **(non necessariamente perfetto!!)** opera su un ciclo termodinamico costituito dalla successione di una espansione isoterma, una compressione isobara ed una compressione adiabatica. La figura rappresenta il ciclo sul piano PV; sono noti la temperatura T_A, la pressione P_A ed il volume V_A riferiti al punto A ("il punto di partenza" del ciclo) e si sa che $V_B = 8V_A$ e $V_C = 4V_A$.



a) Supponendo che tutte le tre trasformazioni siano reversibili, cioè che le equazioni di stato abbiano le ben note espressioni, quanto valgono le temperature T_B e T_C? [Non essendoci valori numerici, esprimete il risultato in funzione dei dati letterali del problema!]
T_B = ……………………………………. T_A [A->B è un'isoterma!]
T_C = ……………………………………. $T_B V_C/V_B = T_A V_C/V_B = T_A/2$ [dove si è sfruttata la legge delle isobare, T/V = *costante*]

b) Ricordando che, per un'adiabatica reversibile, si ha l'equazione di stato $TV^{\gamma-1}$ = *costante*, quanto vale il parametro γ per il gas considerato? [Non è perfetto, e quindi il valore di γ può essere arbitrario! In questo caso potete, anzi, dovete, dare il valore numerico di γ!]

γ = …………………………………… 1.5 [infatti deve essere $T_A V_A^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} = (T_A/2)\ V_A^{\gamma-1}\ 4^{\gamma-1}$, da cui $2 = 4^{\gamma-1}$, da cui γ-1 = ½, da cui la risposta]

c) Supponendo noto il valore c_P del calore specifico molare del gas a pressione costante, quanto valgono i calori Q_1, Q_2 e Q_3 scambiati dal gas nelle tre trasformazioni (isoterma, isobara, adiabatica)? [Supponete che, anche per questo gas non perfetto, si possa scrivere $PV = nR'T$, con R' costante di valore diverso dalla costante dei gas perfetti]

Q_1 = …………………………………… $L_{A\text{->}B} = nR'T_A \ln(V_B/V_A) = nR'T_A \ln(8)$ [dato che per un'isoterma si ha $\Delta U = 0$, il calore coincide con il lavoro, che per l'isoterma del gas considerato ha questa forma (viene dall'integrale di PdV, ricordate?)]

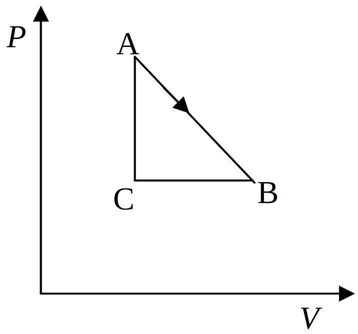
Q_2 = …………………………………… $nc_P\ (T_C - T_B) = -\ n\ c_P\ T_A/2$ [dalla definizione di c_P]

Q_3 = …………………………………… 0 [è un'adiabatica!]

d) Quanto vale l'efficienza η del ciclo?

η = …………………………………… $L_{TOT}/Q_{ASS} = (Q_1+Q_2+Q_3)/Q_1 = 1 + Q_2/Q_1 = 1 - c_P/(2R\ln(8))$ [infatti in un ciclo fatto di trasformazioni reversibili si ha $\Delta U_{TOT} = 0$, da cui, per il primo principio, $L_{TOT} = Q_{TOT}$; che il calore sia assorbito nella isobara si capisce dal segno delle espressioni dei calori date alla risposta precedente]

2. Una mole di gas perfetto monoatomico compie la trasformazione ciclica "triangolare" rappresentata in figura. I punti A, B, C in figura corrispondono a valori delle variabili di stato P_A, V_A, T_A, , P_B, V_B, T_B, e P_B, V_A, T_C, , rispettivamente. Pressioni e volumi sono noti dal grafico, e valgono le seguenti relazioni: $P_A = 2P_B$.; $V_B = 2V_A$.



a) Come si scrive la legge della trasformazione A›B, cioè la relazione che lega P e V in questo tratto? [Suggerimento: determinate la relazione funzionale basandovi su semplici considerazioni "geometriche" sulla figura riportata]

P = ……………………………………….. $((P_B - P_A)/(V_B - V_A))V + ((P_A V_B - P_B V_A)/(V_B - V_A)) = -(P_B/V_A)V + 3P_B$ [è l'equazione della retta che congiunge i punti A e C]

b) Quanto vale il lavoro L del gas nel ciclo? [Suggerimento: ricordate da cosa è rappresentato graficamente il lavoro in un ciclo termodinamico]

L = ……………………………………….. $(V_B - V_A)(P_A - P_B)/2 = P_B V_A/2$ [è l'area del triangolo descritto dal ciclo]

c) Quanto valgono le temperature T_A , T_B e T_C?

T_A = ……………………………………….. $P_A V_A/(nR) = P_A V_A/R = 2P_B V_A/R$ [legge dei gas perfetti con n=1]

T_B = ……………………………………….. $P_B V_B/(nR) = P_B V_B/R = 2P_B V_A/R = T_A$!!!

T_C = ……………………………………….. $P_C V_C/(nR) = P_B V_A/R = P_B V_A/R = T_A/2$ [dato che $P_C = P_B$ e $V_C=V_A$]

d) Quanto vale il calore Q scambiato dal gas nei tratti A›B, B›C, C›A? Discutetene anche il segno. [Suggerimento: ricordate le espressioni di $c_V = (3/2)\ R$ e $c_P = (5/2)\ R$]

Q_{AB} = ………………………………………..$nc_V(T_B - T_A) + L_{AB} = L + P_B(V_B - V_A) = (3/2)P_B V_A > 0$

Q_{BC} = ………………………………………..$n\ c_P\ (T_C - T_B) = (5/2)\ (P_B V_A - P_B V_B) = -(5/2)P_B V_A < 0$

Q_{CA} = ………………………………………..$nc_V(T_A - T_C) = (3/2)\ (P_A V_A - P_B V_A) = (3/2)P_B V_A > 0$

e) Quanto vale l'efficienza η di una macchina che funzioni secondo questo ciclo?

η = ……………………………………….. $L/(Q_{AB}+Q_{CA})$ = $1/12$ [dalla definizione di η]

f) Commentate su un possibile confronto con l'efficienza di una macchina di Carnot "paragonabile" (cioè che lavori tra le stesse temperature massima e minima):

……………………………………….. sarebbe $\eta_{CARNOT} = 1 - T_C/T_A$ = ½ e sarebbe giustamente maggiore di quella trovata per lo strano ciclo triangolare considerato