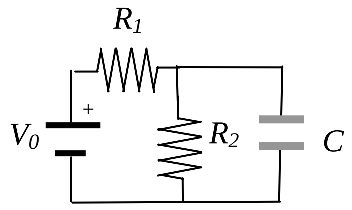
ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 27/07

1. Lo schema di figura rappresenta un circuito elettrico costituito da un generatore di differenza di potenziale continua V_0 = 10.0 V dotato di una resistenza interna R_1 = 100 ohm (la resistenza interna è schematizzabile come un resistore posto in serie al generatore, come in figura). Il sistema generatore/resistenza interna è collegato al parallelo di una resistenza R_2 = 1.00 kohm e di un condensatore, di capacità C = 10.0 μF.

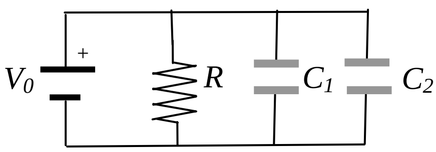


   a) Quanto vale, in condizioni stazionarie, la carica Q accumulata dal condensatore?
   Q = ... = ... C $CV_0(R_2/(R_1+R_2))$ = 9.09x10^{-5} C [la differenza di potenziale ai capi del condensatore è pari a quella ai capi di R_2 , che vale, per la legge di Ohm: $V = R_2 I$. D'altra parte la corrente che scorre nel circuito **in condizioni stazionarie** è $I = V_0/(R_1+R_2)$, da cui, ricordando che $Q = CV$, la soluzione]

   b) All'istante t_0 = 0 il generatore viene istantaneamente scollegato dal circuito; quanto vale il "tempo caratteristico di scarica" τ del condensatore?
   τ = ... = ... s $R_2 C$ = 1.00x10^{-2} s [il condensatore si "scarica" attraverso la resistenza R_2 che è collegata in parallelo a se stesso (la R_1 , quando il generatore è scollegato, non è interessata da passaggio di corrente e per cui non partecipa al processo]

   c) Quanto vale l'**energia** E_{diss} dissipata durante l'**intero** processo di scarica?
   E_{diss} = ... = ... J $C\ V^2/2 = Q^2/2C$ = 4.13x10^{-4} J [per il bilancio energetico, l'energia dissipata **nell'intero** processo di scarica (cioè supponendo di aspettare un tempo che tende ad infinito) è pari all'energia elettrostatica accumulata nel condensatore all'inizio]

2. Un circuito è costruito come nello schema di figura: un generatore ideale di differenza di potenziale continua V_0 = 100 V è collegato ad un parallelo di un resistore (R = 100 kohm) e due condensatori (C_1 = 1.00 μF e C_2 = 100 nF).

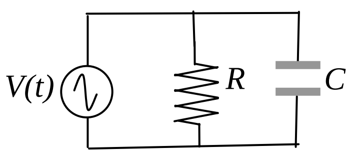


   a) Quanto valgono, **in condizioni stazionarie**, le cariche Q_{10} e Q_{20} accumulate sui due condensatori?
   Q_{10} = ... = ... C C_1V_0 = 1.00x10^{-4} C
   Q_{20} = ... = ... C C_2V_0 = 1.00x10^{-5} C

   b) Quanto vale, **in condizioni stazionarie**, la potenza W fornita dal generatore?
   W = ... = ... W V_0^2/R = 0.100 W [in condizioni stazionarie non c'è passaggio di corrente se non nella resistenza, la cui dissipazione per effetto Joule vale $V_0 I = V_0^2/R$]

   c) Supponendo che all'istante t_0 = 0 il generatore venga scollegato dal circuito, come si esprime l'andamento temporale $V(t)$ della differenza di potenziale fra i punti A e B indicati in figura? [Scrivete la funzione del tempo senza usare i valori numerici]
   $V(t)$ = ... $V_0 \exp(-t/\tau) = V_0 \exp(-t/(R(C_1+C_2))$ [una volta scollegato il generatore si assiste alla scarica dei condensatori attraverso la resistenza R; i due condesnatori in parallelo si comportano come un unico condensatore di capacità complessiva C_1+C_2, da cui la soluzione]

3. Un generatore di differenza di potenziale **alternata** $V(t)=V_0\cos(\omega t)$ è collegato come in figura al parallelo di un condensatore di capacità C con un resistore di resistenza R. [In questo esercizio non si usano valori numerici; supponete che sia sempre valida l'approssimazione "quasi-stazionaria", che consente di utilizzare la legge di Ohm per il comportamento del resistore e la definizione di capacità per il comportamento del condensatore]



   a) Come si scrive la corrente $I_R(t)$ che scorre nel resistore?
   I_{10} = ... $V(t)/R = (V_0/R)\cos(\omega t)$ [per la legge di Ohm]

b) Come si scrive la potenza $W_R(t)$ dissipata dalla resistenza?
$W_R(t)$ = ... $V_0^2 cos^2(\omega t)/R$ [è la dissipazione per effetto Joule]

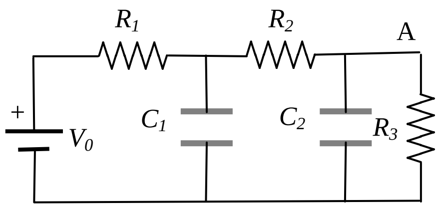
c) Come si scrive la carica $Q(t)$ immagazzinata nel condensatore?
$Q(t)$ = ... $CV_0 cos(\omega t)$ [dalla definizione di capacità, $Q = CV$]

d) Come si scrive la corrente $I_C(t)$ che fluisce dalle armature del condensatore?
$I_C(t)$ = ... $-dQ(t)/dt = \omega CV_0 sin(\omega t)$ [per la conservazione della carica]

e) Come si scrive la corrente totale $I(t)$ fornita dal generatore nei limiti di "bassa" ed "alta" frequenza, cioè rispettivamente quando $\omega << RC$ oppure $\omega >> RC$?
"Bassa" frequenza: $I(t)$ = ... $V_0 cos(\omega t)/R$
"Alta" frequenza: $I(t)$ = ... $V_0 C\omega sin(\omega t)$ [per la conservazione della carica in generale si ha $I(t) = I_R(t)+I_C(t) = V_0 cos(\omega t)/R + \omega CV_0 sin(\omega t) = (V_0/R)(cos(\omega t)+\omega RCsin(\omega t))$; in funzione del regime di funzionamento prevale l'uno o l'altro contributo. Notate che, in regime di alta frequenza (ma sempre in condizioni di applicazione dell'approssimazione "quasistazionaria"), la corrente è sfasata (di $\pi/2$, cioè lo sfasamento che esiste tra funzione coseno e funzione seno) rispetto alla tensione. Questo comportamento si verifica anche a valori intermedi di frequenza, dove lo sfasamento assume un valore minore di $\pi/2$. La soluzione completa del problema richiede di risolvere in modo completo l'equazione differenziale che governa l'andamento della corrente nel tempo, equazione che contiene un termine "forzante" del tipo $V_0 cos(\omega t)$; si può dimostrare che questa soluzione contiene un andamento temporale del tipo $sin(\omega t+\phi)$,con ϕ dipendente proprio dal prodotto ωRC]

f) Come si scrive la potenza $W_C(t)$ "immagazzinata" nel condensatore? [Ricordate l'espressione dell'energia elettrostatica immagazzinata in un condensatore e tenete presente la relazione fra energia e potenza; notate che il termine "immagazzinata" non è del tutto corretto, dato che si può immagazzinare energia, non potenza!]
$W_C(t)$ = ... $d(CV^2/2)/dt = (CV_0^2/2)\ 2cos(\omega t)(-\omega sin(\omega t)) = -\omega\ (CV_0^2/2)\ sin(2\omega t)$ [viene dalle relazione per l'energia elettrostatica immagazzinata in un condensatore, $E = (C/2)V^2$, facendone la derivata temporale per ottenere la potenza; notate che, a differenza della potenza dissipata nella resistenza per effetto Joule, che è sempre positiva, questa potenza, che cambia alternativamente di segno con pulsazione 2ω, ha media temporale nulla. Questo risultato può essere interpretato pensando che il condensatore si carica e scarica alternativamente nel tempo, accumulando e rilasciando energia elettrostatica (mentre la resistenza dissipa sempre e comunque della potenza)]

4. Un circuito elettrico è costituito da tre resistori (R_1 = 100 ohm, R_2 = 400 ohm, R_3 = 500 ohm) e due condensatori (C_1 = 200 nF, C_2 = 1.00 μF) collegati come in figura ad un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 = 10.0 V.



a. Quanto vale la corrente I erogata dal generatore in condizioni stazionarie?
I = ... = ... mA $V_0/(R_1+R_2+R_3)$ = 10.0 mA [in condizioni stazionarie la corrente passa attraverso la serie delle tre resistenze]

b. Quanto vale l'"energia elettrostatica" U_E totale accumulata nei due condensatori in condizioni stazionarie?
U_E = ... = ... J $(C_1/2)V_1^2 + (C_2/2)V_2^2 = (C_1/2)(V_0-R_1I)^2 + (C_2/2)(V_0-(R_1+R_2)I)^2$ = 2.06×10^{-5} J [ogni condensatore accumula un'energia $(C/2)V^2$; le differenze di potenziale ai capi dei due condensatori si calcolano tenendo conto della caduta di potenziale sulle resistenze R_1 ed R_1+R_2]

c. Supponete che, ad un dato istante, la resistenza R_3 venga scollegata dal circuito (in pratica interompendo il collegamento nel punto A di figura). Dopo aver atteso un tempo sufficientemente lungo affinché sia raggiunta **una nuova condizione stazionaria**, quanto vale la carica Q_2 accumulata nel condensatore C_2?
Q_2 = ... = ... C C_2V_0 = 1.00×10^{-5} C [nelle nuove condizioni stazionarie non c'è flusso di corrente nel circuito, per cui non c'è alcuna caduta di tensione nelle resistenze e la differenza di potenziale ai capi di C_2 uguaglia V_0, da cui la soluzione]

Francesco Fuso – tel 050 2214305 – e-mail: fuso@df.unipi.it – web page: http://www.df.unipi.it/~fuso/dida