ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 29/07

1. Un cilindro di altezza h e raggio a porta nel suo volume una densità di carica che è funzione del raggio secondo la legge $\rho(r) = \rho_0\, r^2/a^2$. La geometria del cilindro è tale che esso può essere considerato **molto lungo**, cioè si possono trascurare gli "effetti ai bordi" che interessano le superfici di base
   a) Sulla base dei ragionamenti di simmetria e geometria, commentate sulla dipendenza dalle coordinate spaziali e sulla direzione del campo $\boldsymbol{E(r)}$ generato dalla distribuzione di carica.
   Dipendenza dalle coordinate spaziali: ……………………… il campo può dipendere solo dal modulo di r per ragioni di simmetria (c'è invarianza rispetto alla rotazione e rispetto alla traslazione assiale)
   Direzione: ……………………… il campo è diretto radialmente per ragioni di simmetria (ad esempio, il potenziale elettrostatico può solo dipendere da r e quindi le superfici equipotenziali sono cilindri coassiali: il campo deve essere ortogonale rispetto a loro, cioè radiale)

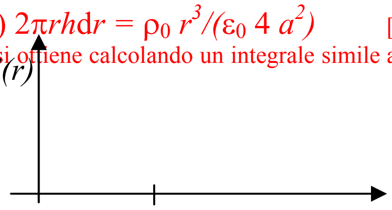
   b) Quanto vale la carica totale Q contenuta nel cilindro? [Attenzione: la ρ **non** è uniforme, per cui dovete considerare la definizione $\rho(r) = dq(r)/dV$!! Vi conviene considerare il cilindro come formto da tanti gusci cilindrici coassiali di spessore inifinitesimo dr]
   Q = …………………………………... $\int dq = \int \rho(r)\, dV = \int_0^a \rho(r)\, 2\pi r h dr = 2\pi\, h\, (\rho_0/a^2) \int_0^a r^3\, dr = \pi\, h\, \rho_0\, a^2/2$

   c) Quanto vale il modulo del campo elettrico $E_{ext}(r)$ in un punto collocato a distanza r dall'asse del cilindro esternamente a questo?
   $E_{ext}(r)$ = …………………………………... $Q/(\varepsilon_0\, 2\pi h\, r) = \rho_0\, a^2/(\varepsilon_0\, 4\, r)$ [si ottiene applicando il teorema di Gauss ad una superfcie cilindrica di raggio $r > a$ che contiene il cilindro]

   d) Quanto vale il modulo del campo elettrico $E_{int}(r)$ in un punto collocato a distanza r dall'asse del cilindro internamente a questo?
   $E_{int}(r)$ = …………………………………... $(1/(\varepsilon_0\, 2\pi h\, r)) \int_0^r \rho(r)\, 2\pi r h dr = \rho_0\, r^3/(\varepsilon_0\, 4\, a^2)$ [come sopra, ma stavolta la carica interna alla superficie di Gauss **non** è tutta la Q, ma solo quella che si ottiene calcolando un integrale simile a quello del punto b), con gli estremi si integrazione che vanno da 0 a r (generico e tale che $r<a$)]

   e) Disegnate schematicamente l'andamento del modulo di $E(r)$ in funzione di r.

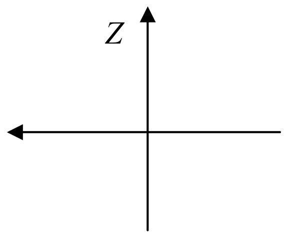
$E(r)$



a

2. Considerate il piano $z = 0$ (è un piano XY collocato alla quota $z = 0$). Al di sotto del piano, cioè per $z < 0$, è presente il campo elettrico $\boldsymbol{E_1} = (a, 0, b)$, mentre al di sopra, cioè per $z > 0$, si trova il campo $\boldsymbol{E_2} = (0, 0, c)$; a,b,c sono componenti dei campi elettrici, tutte positive, opportunamente dimensionate e tali che $a = b$ e $c = 2a$.

Z



X

   a) Indicate nel grafico accanto i vettori $\boldsymbol{E_1}$ ed $\boldsymbol{E_2}$.

   b) Quanto valgono le componenti dei campi E_{1n} ed E_{2n} ortogonali al piano $z = 0$?
   E_{1n} = …………………………………... b
   E_{2n} = …………………………………... c

   c) Quanto vale il flusso del campo elettrico $\Phi(\boldsymbol{E})$ attraverso un cilindretto con asse lungo Z , superficie di base ΔS ed altezza dz (infinitesima, cioè **trascurabile**)?
   $\Phi(\boldsymbol{E})$ = …………………………………... $(E_{2n} - E_{1n})\, \Delta S$, dove si è trascurato il flusso attraverso la superficie laterale (infinitesima) e si è assunto come positivo il segno corrispondente ad un campo diretto verso le z positive.

   d) Quanto vale la densità di carica superficiale σ presente sul piano $z = 0$?
   σ = …………………………………... $(E_{2n} - E_{1n})\varepsilon_0$ [dal teorema di Gauss applicato al cilindretto]

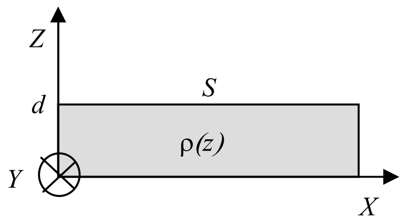
3. Una sfera di raggio a porta una densità di carica volumica dipendente solo dalla distanza dal centro r secondo la legge $\rho(r) = \rho_0 r^4/a^4$, con ρ_0 costante opportunamente dimensionata. [Non usate valori numerici nelle risposte di questo esercizio!]

a) Come si esprime la carica complessiva Q portata dalla carica? [Può farvi comodo ricordare che per una variabile generica ξ si ha $\int\xi^n d\xi = \xi^{n+1}/(n+1)$]
Q = ……………………………………… $\int_{SFERA} dq = \int_{VOL.\ SFERA} \rho(r)dV = \int_0^a \rho_0 r^4/a^4\ 4\pi r^2\ dr = (4\pi\rho_0/a^4)\int_0^a r^6 dr = 4\pi\rho_0 a^3/7$ [dalla definizione di densità di carica $\rho = dq/dV$; nell'integrale abbiamo sfruttato la simmetria sferica del problema ed usato l'elemento di volume $dV = 4\pi r^2 dr$]

b) Come si esprime la dipendenza del campo elettrico $E_{INT}(R)$ dalla distanza dal centro R all'interno della sfera, cioè per $R<a$? [dovete scrivere la funzione $E_{INT}(R)$; ε_0 è la costante dielettrica del vuoto]
$E_{INT}(R)$ = ……………………………………… $Q_{r=R}/(\varepsilon_0 4\pi R^2) = (\int_0^R \rho_0 r^4/a^4\ 4\pi r^2\ dr)/\ (\varepsilon_0 4\pi R^2) = \rho_0 R^5/(7\varepsilon_0 a^4)$ [dal teorema di Gauss applicato ad una superficie sferica concentrica con la sfera data e di raggio **generico** $R < a$; per determinare la carica interna a questa sfera di Gauss, indicata con $Q_{r=R}$, si esegue un'integrazione simile a quella vista alla soluzione del punto precedente, ma limitata all'intervallo $r=0,\ r=R$]

c) Come si esprime il potenziale V_0 a cui si trova il centro della sfera (il punto $R = 0$)? [Fate attenzione al fatto che la sfera non è conduttrice, e dunque la carica presente nel volume non si ridistribuisce come per un conduttore all'equilibrio! Inoltre ricordate che si ha in questo caso potenziale nullo all'infinito]
V_0 = ……………………………………… $\int_0^\infty \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \int_0^\infty E(r)dr = \int_0^a E_{INT}(r)dr + \int_a^\infty E_{EXT}(r)dr = \int_0^a (\rho_0 r^5/(7\varepsilon_0 a^4))\ dr + \int_a^\infty (Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2))dr = (\rho_0 a^2/(42\varepsilon_0)) + (Q/4\pi\varepsilon_0 a) = (\rho_0 a^2/\varepsilon_0)(1/42+1/7) = \rho_0 a^2/(6\varepsilon_0)$ [la definizione di differenza di potenziale stabilisce che $\Delta V = -\int_0^\infty \mathbf{E}\cdot \mathbf{dl}$; si ha poi $\Delta V = V_\infty - V_0$, da cui la soluzione; notate che abbiamo suddiviso il calcolo dell'integrale in due parti, la prima dentro la sfera e la seconda fuori; l'espressione del campo esterno E_{EXT} è, secondo il teorema di Gauss, analoga a quella di una carica puntiforme Q collocata in $r = 0$]

4. Una lastra di materiale non conduttore è "appoggiata" sul piano XY di un sistema di riferimento, come rappresentato in figura. La lastra è molto più "larga" di quanto non sia "alta", in modo da poter trascurare gli "effetti ai bordi": infatti la sezione di base vale $S = 1.0\text{x}10^3$ cm^2, mentre lo spessore vale d = 1.0 cm. La lastra porta una distribuzione di carica volumica **disomogenea** che dipende solo dalla quota z secondo la legge $\rho(z) = \rho_0 z^2/d^2$, con $\rho_0 = 3.0\text{x}10^{-5}$ C/m^3. Si sa che il campo elettrico è nullo per $z \le 0$.



Disegno non in scala!

a) Quanto vale la carica Q portata dalla lastra al suo interno? [Sfruttate in modo opportuno la simmetria piana del problema!]
Q = …………………………….. = ... C $\int_{lastra} dq = \int_{lastra}\rho(z)\ dV = (\rho_0 S/d^2)\ \int_0^d z^2 dz = (\rho_0 S/d^2)\ d^3/3 = \rho_0 S\ d/3 = 1.0\text{x}10^{-8}$ C [la soluzione viene dalla definizione di densità volumica di carica, tenendo presente che l'integrale, nelle condizioni di simmetria piana considerata, può essere calcolato usando l'elemento di volume $dV = Sdz$, che corrisponde a suddividere la lastra in tante "lamine" sovrapposte]

b) Quanto vale la differenza di potenziale ΔV tra faccia "superiore" e faccia "inferiore" della lastra (cioè tra i punti $z = d$ e $z = 0$)? [Usate il valore $\varepsilon_0 = 8.8\text{x}10^{-12}$ F/m per la costante dielettrica nella lastra]
ΔV = …………………………….. = ... V $-\int_0^d \mathbf{E}\cdot \mathbf{dl} = -\int_0^d E(z)\ dz = -\int_0^d (\rho_0/(3d^2\varepsilon_0)\ z^3\ dz = -\rho_0 d^2/(12\varepsilon_0) = -\ 28$ V [il campo interno alla lastra si determina in funzione di z usando Gauss su una superficie chiusa costituita da una lastra ideale di sezione S con una faccia in $z = 0$ (dove il campo è nullo!) e l'altra alla quota z **generica** . Sapendo che il campo è diretto lungo z e dipende solo da z (si trascurano gli "effetti ai bordi"), si ha allora $\Phi_{S,chiusa}(\mathbf{E}) = SE(z) = Q_{INT}(z)/\varepsilon_0$. La carica interna alla superficie di Gauss in questione si trova integrando nel volume secondo quanto stabilito nella risposta alla domanda precedente]

c) Un elettrone (massa $m = 9.0\text{x}10^{-31}$ kg, carica $q = -\ 1.6\text{x}10^{-19}$ C) incide sulla faccia "inferiore" (z=0) della lastra avendo una velocità iniziale di modulo $v_0 = 2.0\text{x}10^6$ m/s diretta nel verso positivo dell'asse Z. Supponendo ragionevolmente che l'elettrone possa penetrare nel materiale della lastra senza "interagire meccanicamente" con esso (cioè trascurando ogni forma di attrito), quanto vale, in modulo, la velocità v con cui esso lascia la faccia "superiore" (z=d) della lastra? [**Trascurate ogni effetto della forza peso** sulla dinamica dell'elettrone]
v = …………………………….. ~ .... m/s $(v_0^2 - (2q/m)\Delta V)^{1/2} \sim 3.7\text{x}10^6$ m/s [per la conservazione dell'energia, che si applica in assenza di attriti, si ha $(m/2)v_0^2 = (m/2)v^2 + q\Delta V$; fate attenzione al fatto che q < 0, per cui l'elettrone viene accelerato!]