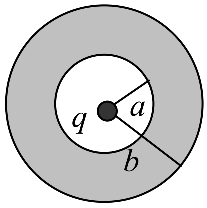
ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 30/07

1. Una carica puntiforme q si trova al centro di una cavità sferica vuota ricavata all'interno di una sfera conduttrice; la cavità ha raggio a e la sfera ha raggio b, ed esse sono concentriche (vedi figura). Il sistema è in equilibrio



   a) Supponendo che la sfera conduttrice cava sia **scarica**, cioè che non porti alcuna carica, quanto vale il campo elettrico $E(r)$ (modulo) nelle tre regioni $r<a$, $a<r<b$, $r>b$?

   $E(r)$ = ……………………………………... $r<a$ $q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ [carica puntiforme nell'origine!]

   $E(r)$ = ……………………………………... $a<r<b$ 0   [conduttore in equilibrio]

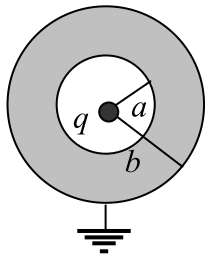
   $E(r)$ = ……………………………………... $r>b$ $q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ [Gauss su una superficie sferica, tenendo conto che la carica contenuta nella superficie è q – la sfera cava è scarica!]

   b) Quanto valgono le cariche q_a e q_b rispettivamente sulla superficie della cavità ($r=a$) e sulla superficie della sfera ($r=b$)?

   q_a = ……………………………………... $-q$ [basta applicare Gauss ad una superficie sferica di raggio compreso tra a e b , dove il campo è nullo, e notare che la carica contenuta al suo interno, che deve essere nulla, è data dalla somma algebrica $q+q_a$]

   q_b = ……………………………………... q [la sfera deve essere globalmente scarica, per cui $q_a+q_b=0$, da cui il risultato]

   c) Supponendo invece che la sfera sia **collegata a terra** come schematizzato in figura**,** quanto verrebbe a valere il campo elettrico $E'(r)$ nella regione esterna alla sfera, cioè per $r>b$? [Ricordate che collegare a terra significa porre a "potenziale nullo" un conduttore!]



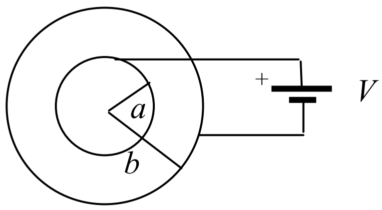
   $E'(r)$ = ……………………………………...   0   [altrimenti la superficie esterna della sfera verrebbe ad avere una differenza di potenziale rispetto all'infinito, cioè non sarebbe a potenziale nullo, dato che $-\int_b^\infty E'(r)\,dr$ è diverso da zero se $E'(r)$ è diverso da zero]

   d) Quanto vengono a valere, in questo caso, le cariche q'_a e q'_b rispettivamente sulla superficie della cavità ($r=a$) e sulla superficie della sfera ($r=b$)?

   q'_a = ……………………………………... $-q$ [resta valido il ragionamento della risposta b)]

   q'_b = ……………………………………...   0   [la sfera in questo caso deve portare una carica pari a $-q$ per "annullare" nella regione $r>b$ il campo creato dalla carica q, da cui il risultato]

2. Avete due gusci cilindrici di materiale conduttore coassiali tra loro, di raggio rispettivamente a e b, e lunghezza h (tutti e due, e, al solito, la lunghezza è così grande da poterli considerare praticamente infiniti). I due gusci sono collegati ad una batteria che genera una differenza di potenziale V (il guscio interno è collegato al polo positivo). Il sistema è all'equilibrio (cioè il condensatore è stato "caricato completamente"). La figura rappresenta il sistema visto dall'alto.



   a) Come si esprime la dipendenza funzionale del campo $E(r)$ (modulo) con il raggio r nella regione compresa tra le due armature cilindriche, cioè per $a < r < b$? [Dipendenza funzionale significa che dovete stabilire come va il campo con il raggio impiegando qualche parametro ancora incognito del problema, ad esempio la carica Q presente sull'armatura interna]

   $E(r)$ = ……………………………………... $Q/(\varepsilon_0 2\pi h\, r)$ [è il "solito" campo prodotto da una distribuzione uniforme di geometria cilindrica, e si ottiene con Gauss]

   b) Ora, tenendo conto dei dati del problema, quanto vale la carica Q presente sull'armatura interna (quella di raggio a)? [Il dato che vi consiglio di impiegare è la differenza di potenziale!!]

   Q = ……………………………………... $\varepsilon_0 2\pi h\, V / \ln(b/a)$ [viene calcolando la differenza di potenziale tra a e b e ponendola pari a V. In pratica si usa la $V = -\int_a^b E(r)\,dr$, usando la dipendenza funzionale del campo derivata nella risposta a). Non lo abbiamo detto esplicitamente, ma ovviamente il campo è radiale e, come si vede dalla risposta a), anche **non** uniforme benché nella regione tra le armature non ci siano cariche di volume (dipende dalla geometria cilindrica: fosse stato un condensatore ad armature piane il campo sarebbe stato uniforme: riflettete!]

   c) Quanto valgono le **densità superficiali** di carica σ_a e σ_b sulle due armature?

σ_a = …………………………………….. $Q/(2\pi h\ a)$ [la densità di carica è uniforme per invarianza rotazionale del problema, e il risultato si ottiene dividendo la carica per la superficie del guscio]

σ_b = …………………………………….. $-\ Q/(2\pi h\ b)$ [come sopra, notando che sull'armatura esterna si accumula una carica uguale ed **opposta** a quella dell'armatura interna – il condensatore deve essere globalmente "scarico"]

d) Quanto vale la capacità C del condensatore?

C = …………………………………….. $Q/V = \varepsilon_0\ 2\pi h / ln(b/a)$ [per definizione]

e) Quanto vale l'energia elettrostatica U_E accumulata nel condensatore?

U_E = …………………………………….. $CV^2/2 = Q^2/(2C) = \varepsilon_0\ 2\pi h\ V^2 / (2ln(b/a))$

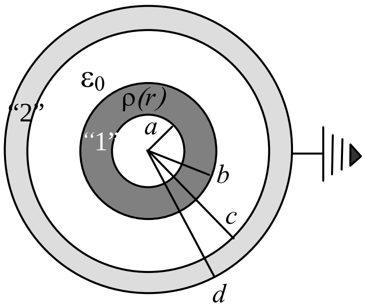
f) Nel processo di carica del condensatore, che si suppone sia stato compiuto in precedenza, il generatore di differenza di potenziale ha eseguito un certo lavoro L_G. Se si suppone di suddividere il processo di carica, che avrà richiesto un certo tempo, in tanti intervalli infinitesimi in ognuno dei quali una carica infinitesima dq viene "portata sulle armature", quanto vale il lavoro infinitesimo dL_G associato ad ogni intervallino? [Suggerimento: ricordate il legame tra differenza di potenziale e lavoro delle forze del campo]

dL_G = …………………………………….. $V\ dq = (q/C)\ dq$ [infatti il generatore compie su una carica dq un lavoro pari a Vdq; notate che, nel processo di carica, la differenza di potenziale tra le armature **non** è costante, e può convenientemente essere espressa come q/C (non è costante perché q aumenta fino al valore Q che avrà all'equilibrio)]

g) Quanto vale il lavoro complessivo L_G fatto dal generatore per completare la carica del condensatore?

L_G = …………………………………….. $\int_0^Q (q/C)\ dq = Q^2/(2C)$ [viene da quanto affermato qui sopra. Notate che $L_G = U_E$, come deve essere per ragioni di bilancio energetico]

3. Un guscio sferico (detto "1") di raggio interno a = 10 cm e raggio esterno b = 20 cm porta al suo interno una densità di carica volumica **disomogenea** che dipende solo dalla distanza r dal centro secondo la legge $\rho(r) = \rho_0 b^2/r^2$, con ρ_0 = 1.0x10^{-5} C/m^3. Un secondo guscio, detto "2", fatto di **materiale conduttore**, ha raggio interno c = 40 cm, raggio esterno d = 50 cm ed è **collegato a terra**. Il guscio "2" circonda il guscio "1" essendo concentrico ad esso, come rappresentato schematicamente in figura.



a) Quanto vale la carica Q portata dal guscio "1" al suo interno? [Sfruttate in modo opportuno la simmetria sferica del problema!]

Q = ……………………………… = ... C $\int_{guscio} dq = \int_{guscio}\rho(r)\ dV = \rho_0 b^2 4\pi \int_a^b (1/r^2)\ r^2 dr = \rho_0 4\pi b^2\ (b-a) = 5.0$x10^{-7} C [la soluzione viene dalla definizione di densità volumica di carica, tenendo presente che l'integrale, nelle condizioni di simmetria sferica considerata, può essere calcolato usando l'elemento di volume $dV = 4\pi r^2 dr$, che corrisponde a suddividere il guscio "1" in tanti gusci concentrici di spessore infinitesimo]

b) Quanto valgono le cariche Q_c e Q_d che, all'equilibrio, si trovano sulle superfici interna (r=c) ed esterna (r=d) del guscio "2"?

Q_c = ……………………………… = ... C $-Q$ = - 5.0x10^{-7} C [applicando il teorema di Gauss ad una superficie sferica di raggio $c<R<d$ si trova che, dovendo essere il campo nullo all'equilibrio e quindi essendo nullo il flusso, la carica contenuta è nulla. Questa carica contenuta è data dalla somma algebrica $Q + Q_c$, da cui la soluzione]

Q_d = ……………………………… = ... C 0 [infatti il campo esterno all'intero sistema, cioè quello per $r>d$, deve essere nullo essendo nullo il potenziale del guscio "2" (la differenza di potenziale da qui all'infinito deve essere nulla!). La condizione è già soddisfatta dalla carica Q_c, per cui su questa superficie non si deposita altra carica]

c) A quale **potenziale elettrico** V_b si trova la superficie esterna del guscio "1", cioè la superficie sferica di raggio r=b? [Ricordate la relazione tra differenza di potenziale e potenziale, e che, per convenzione, la terra ha potenziale nullo (V_{TERRA}=0); usate il valore ε_0 = 8.8x10^{-12} F/m per la costante dielettrica del vuoto, che è il "mezzo" che si trova fra i due gusci]

V_b = ……………………………… = ... V $\int_b^c \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \int_b^c E \cdot dr = \int_b^c Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2) \cdot dr = (Q/(4\pi\varepsilon_0))(1/b-1/c) = 1.4$x10^4 V [per definizione si ha $\Delta V = V_c - V_b = 0 - V_b = -\int_b^c \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl}$, dove si è sfruttato il fatto che il guscio "2", e quindi anche tutti i punti che si trovano ad $r = c$, sono a terra, cioè a potenziale nullo. Per il calcolo abbiamo sfruttato il teorema di Gauss, che stabilisce che il campo nella regione tra i due gusci è quello di una carica puntiforme Q collocata al centro del guscio "1"]