

## ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 32/07

1. Uno ione positivo di carica unitaria esegue delle orbite circolari sul piano  $XY$  a causa della presenza di un campo magnetico costante ed uniforme diretto lungo l'asse  $Z$  e di modulo  $B_0 = 1.0 \times 10^{-2}$  T; la velocità angolare dell'orbita, costante nel tempo, vale  $\omega = 1.0 \times 10^4$  rad/s. [Trascurate ogni effetto della forza peso ed ogni effetto di forze d'attrito nella dinamica dello ione; ricordate che la carica unitaria vale  $q = 1.6 \times 10^{-19}$  C]

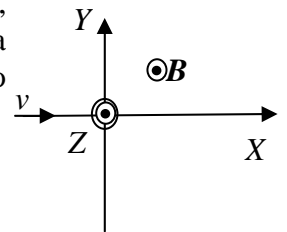
a) Quanto vale la massa  $m$  dello ione?

$m = \dots\dots\dots = \dots\dots$  kg       $qvB_0/(\omega^2 R) = q\omega RB_0/(\omega^2 R) = qB_0/\omega = 1.6 \times 10^{-25}$  kg [la forza di Lorentz  $qv \times B_0$  fornisce l'accelerazione centripeta  $m\omega^2 R$ , con  $R$  raggio dell'orbita]

b) Quanto vale il lavoro  $L$  fatto dalle forze del campo magnetico quando lo ione percorre un'intera orbita?

$L = \dots\dots\dots = \dots\dots$  J      0 [forza e spostamento sono ortogonali!]

2. Degli atomi ionizzati una sola volta (cioè particelle dotate di carica positiva unitaria,  $e$ ) e di massa  $m$  entrano con velocità  $v$  diretta lungo l'asse  $X$  (vedi figura) in una regione dove è presente un campo magnetico omogeneo di modulo  $B$  diretto lungo l'asse  $Z$ .



a) Quanto valgono il modulo  $F$ , la direzione e il verso della forza di natura magnetica risentita dagli ioni?

$F = \dots\dots\dots$   $e v B$   
 Direzione e verso:  $\dots\dots\dots$  Lungo l'asse  $Y$  di figura, verso negativo

b) Commentate sul tipo di moto che compiono gli ioni in presenza del campo magnetico.

$\dots\dots\dots$  è un moto circolare sul piano  $XY$  in cui la forza magnetica ha il ruolo di forza centripeta

c) Supponendo che il campo magnetico sia presente solo nel semispazio  $x > 0$ , che gli ioni viaggino (nel semispazio  $x < 0$ ) lungo l'asse  $x$  (come in figura), in quale punto  $y_0$  dell'asse  $Y$  finiranno gli ioni? [Notate che la dipendenza dalla massa della posizione di arrivo che state calcolando è alla base degli "spettrometri di massa" a campo magnetico, strumenti analitici per determinare la massa di una specie atomica o molecolare]

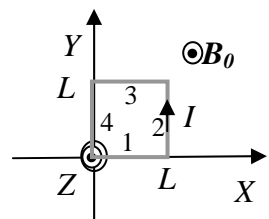
$y_0 = \dots\dots\dots$   $-2 mv / (eB)$  [infatti, a parte il segno negativo che dipende dal segno della forza, questo è il diametro dell'orbita circolare percorsa dagli ioni, come si verifica uguagliando la forza centripeta  $mv^2/r$  con la forza magnetica – se disegnatte sul grafico la traiettoria vedrete che si tratta proprio del loro punto di arrivo]

3. Un filo elettrico in cui circola una corrente costante  $I = 1.0$  A ha lunghezza  $L = 20$  cm ed è disposto lungo l'asse  $X$ ; un campo magnetico **uniforme** di modulo  $B_0 = 0.10$  T è disposto lungo la bisettrice del I quadrante del piano  $XY$ .

a) Quanto vale la forza magnetica  $F$  che il campo esercita sul filo? [Esprimete modulo, direzione, verso]

$F = \dots\dots\dots = \dots\dots$  N  $ILB_0 \sin(\pi/4) = 1.4 \times 10^{-2}$  N [dalla definizione:  $F = \int dF$ , con  $dF = I dl \times B$ ; il risultato si ottiene notando che, essendo il campo uniforme, la forza è costante su tutto il segmento]  
 Direzione e verso:  $\dots\dots\dots$  verso positivo dell'asse  $Z$  [dalla regola della mano destra, notando che filo e campo magnetico appartengono entrambi al piano  $XY$ ]

4. Una spira quadrata è costituita da quattro spezzoni di filo elettrico di lunghezza  $L$ , ovviamente collegati fra di loro a formare la spira. La spira è disposta come in figura, con i suoi lati paralleli a coppie agli assi  $X$  ed  $Y$  di un sistema di riferimento; al suo interno scorre una corrente costante di intensità  $I$ , che circola nel verso indicato in figura (si intende che questa corrente è prodotta da un qualche generatore collegato in qualche modo che non sappiamo alla spira)..



- a) Supponendo che nello spazio in cui si trova la spira sia presente un campo magnetico esterno **uniforme** e costante, di modulo  $B_0$  e direzione lungo il verso positivo dell'asse Z, quanto valgono le forze  $F_1, F_2, F_3, F_4$  che agiscono sui quattro lati della spira? [esprimeteli in forma vettoriale e, per la numerazione, fate riferimento alla figura]

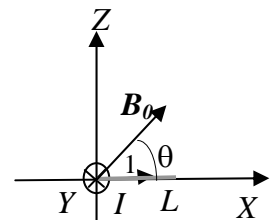
$F_1 = \dots\dots\dots -B_0IL \mathbf{y}$  , con  $\mathbf{y}$  versore dell'asse Y [su ogni elementino  $dL$  della spira agirà una forza  $dF = I dL \times \mathbf{B}_0$  ; dunque su ogni spezzone di filo agirà una forza totale che si può ottenere calcolando l'integrale dell'espressione appena scritta sulla lunghezza dello spezzone stesso. Essendo la corrente e il campo magnetico uniformi e costanti, è facile rendersi conto che l'integrazione è banale e che il modulo della forza su uno spezzone (cioè su un lato qualsiasi della spira) vale  $F = B_0IL$ . Direzione e verso sono invece differenti per i vari spezzoni, cioè lati, e si ottengono dalla regola della mano destra]

$F_2 = \dots\dots\dots B_0IL \mathbf{x}$  , con  $\mathbf{x}$  versore dell'asse X [vedi sopra]  
 $F_3 = \dots\dots\dots B_0IL \mathbf{y}$  , con  $\mathbf{y}$  versore dell'asse Y [vedi sopra]  
 $F_4 = \dots\dots\dots -B_0IL \mathbf{x}$  , con  $\mathbf{x}$  versore dell'asse X [vedi sopra]

- b) Quanto vale la forza totale  $F_{tot}$  risultante sull'intera spira? [Si ottiene sommando le forze sui singoli spezzoni!]

$F_{tot} = \dots\dots\dots 0$  [le forze si annullano a coppie!]

- c) Supponete ora che il campo magnetico esterno sia sempre uniforme e costante e di modulo  $B_0$ , ma che la sua direzione sia orientata nel verso positivo della bisettrice del quadrante XZ (la figura, che rappresenta una vista "laterale" del sistema, dovrebbe chiarire la situazione!). Quanto vale in queste nuove condizioni la forza totale  $F_{tot}$  risultante sull'intera spira?



$F_{tot} = \dots\dots\dots 0$  [esaminiamo gli spezzoni, cioè i lati della spira, a coppie.]

Sugli spezzoni 1 e 3, che sono diretti lungo l'asse X, agiranno forze uguali ed opposte, dirette lungo Y e di modulo pari a  $B_0IL \sin\theta$ , con  $\theta = \pi/4$ , secondo quanto stabilito dalle regole del prodotto vettoriale. Sugli spezzoni 2 e 4, paralleli all'asse Y, agiranno forze uguali e opposte dirette lungo la bisettrice del II-IV quadrante del piano XZ (queste forze devono essere ortogonali sia alla direzione dell'asse Y, a cui appartengono gli spezzoni, che al campo magnetico  $\mathbf{B}_0$ ) e di modulo  $B_0IL$ . In ogni caso, le forze si annullano ancora a coppie, e quindi la risultante è nulla come nella risposta al punto precedente]

- d) Dal punto di vista "meccanico", qual è la principale differenza fra la situazione considerata ora e quella analizzata nelle domande a) e b)? Commentate!

Commento:  $\dots\dots\dots$  come già affermato, la forza totale continua ad essere nulla, per cui, supponendo che la spira sia realizzata con filo sufficientemente rigido, non ci sono effetti di tipo traslazione (degli spezzoni o del centro di massa del sistema).. Tuttavia le forze che agiscono sugli spezzoni 2 e 4 produrranno un momento diverso da zero rispetto all'asse "di simmetria" della spira (questo asse è parallelo all'asse Y e passante per il punto di mezzo della spira; in termini geometrici la sua equazione è  $x = L/2, z = 0$ ). Esaminiamo infatti il momento della forza  $F_2$  rispetto a questo asse: si ha  $\tau_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{y} B_0IL (L/2) \sin\theta = \mathbf{y} B_0IL^2 \sin\theta / 2$ , dato che il braccio della forza rispetto al punto  $x = L/2$  vale  $L \sin\theta / 2$  (direzione e verso si determinano al solito con la regola della mano destra). Si può facilmente verificare che anche il momento prodotto dalla forza  $F_4$  ha lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso. Dunque sulla spira agirà un momento (rispetto all'asse sopra specificato) di modulo  $\tau = B_0IL^2 \sin\theta$  e direzione  $\mathbf{y}$ . Osservate che il momento prodotto dalle forze sugli spezzoni 1 e 3 è nullo, dato che le due forze sono uguali, opposte e sono applicate su punti che appartengono allo stesso piano (il piano XY) e quindi non è possibile determinare un polo rispetto al quale le forze in questione abbiano un momento non nullo. Infine, notate che è alla stessa espressione del momento delle forze si arriva definendo il **momento di dipolo magnetico**  $\mu$  della spira; esso ha modulo pari al prodotto dell'area della spira,  $L^2$ , per la corrente che la attraversa, cioè  $\mu = L^2 I$ , mentre la direzione e il verso si determina con la regola del "pugno destro" (se chiudete il pugno destro nel verso della corrente, il momento è diretto come il pollice della stessa mano destra). Dunque, tenendo conto della geometria del problema, il momento di dipolo magnetico della spira è  $\mu = z L^2 I$ . Noto il momento magnetico, il momento delle forze si esprime semplicemente come  $\tau = \mu \times \mathbf{B}_0 = y L^2 I B_0 \sin\theta$ , cioè lo stesso risultato ottenuto prima in altra forma. L'effetto del momento è ovviamente quello di indurre una rotazione della spira attorno all'asse sopra determinato (la spira tende a ruotare in senso orario, rispetto alla figura, in modo che il momento magnetico si allinei con il campo esterno). Notate che il metodo del momento magnetico è di impiego generale, cioè vale anche per spire di geometria non quadrata]