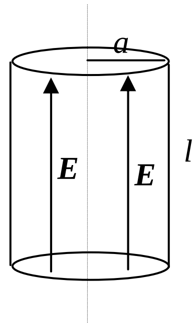
ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 34/07

1. Un conduttore di forma cilindrica lunghezza l e raggio a presenta al suo interno una conducibilità **disomogenea** che dipende dalla distanza r dall'asse secondo la legge $\sigma(r) = \sigma_0\, r/a$. Al conduttore è applicato un campo elettrico **omogeneo ed uniforme** diretto lungo l'asse e di modulo E. La figura rappresenta schematicamente la situazione.



   a) Quanto vale la differenza di potenziale V tra base superiore e base inferiore del cilindro?
   V = …………………………………... $E\,l$ [il campo è omogeneo ed uniforme!]

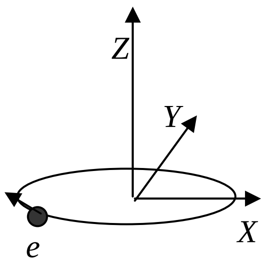
   b) Quanto valgono modulo direzione e verso della **densità di corrente** $\boldsymbol{J}(r)$ che passa nel conduttore?
   $J(r)$ = …………………………………... $\sigma(r)\,E = \sigma_0\, r\, E / a$ [per definizione!]
   Direzione e verso: …………………………… come $\boldsymbol{E}$

   c) Quanto vale la resistenza R del conduttore? [Attenzione: tenete in debito conto la disomogeneità del sistema!]
   R = …………………………………... $V/I = E\,l / \int_{SEZIONE} \boldsymbol{J}(r)\cdot\boldsymbol{n}\, dS = E\,l / \int_0^a J(r)\, 2\pi r\, dr = E\,l / ((2\pi\, \sigma_0 E / a) \int_0^a r^2\, dr) = (la / 2\pi\, \sigma_0) / (a^3/3) = (3l / 2\pi\, \sigma_0\, a^2)$ [avendo notato che $\boldsymbol{J}$ è parallelo ad $\boldsymbol{n}$, ed avendo fatto f'integrale suddividendo, al solito, la sezione del cilindro in tante corone circolari di superficie infinitesima $dS = 2\pi r\, dr$]

   d) Quanto vale in modulo, direzione e verso il campo magnetico $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ generato dalla corrente che scorre nel conduttore in una regione esterna al conduttore stesso (cioè per $r > a$)?
   $B(r)$ = …………………………………... per $r > a$ $\mu_0 I / (2\pi r) = \mu_0 (E 2\pi\, \sigma_0\, a^2 / 3) / (2\pi r) = \mu_0 E \sigma_0\, a^2 / (3r)$ [teorema di Ampere su una circonferenza di raggio r generico e maggiore di a, notando che tutta la corrente I,, calcolata con lo stesso procedimento della risposta c), è concatenata con la circonferenza]
   Direzione e verso: …………………………… direzione "tangenziale" alla circonferenza usata per la circuitazione, e verso stabilito dalla regola della mano destra

   e) Quanto vale, invece, il campo magnetico $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ internamente al cilindro, cioè per $r<a$?
   $B(r)$ = …………………………………... per $r < a$ $\mu_0 I_C / (2\pi r) = \mu_0 (\int_0^r J(r)\, 2\pi r\, dr) / (2\pi r) = \mu_0 ((2\pi\, \sigma_0 E / a) \int_0^r r^2\, dr) / (2\pi r) = \mu_0 \sigma_0 E\, r^3 / (3r) = \mu_0 \sigma_0 E\, r^2 / (3a)$ [come sopra, ma stavolta la corrente concatenata è solo quella che passa in un cerchio di raggio r]
   Direzione e verso: …………………………… come sopra

2. Un semplice modello per l'atomo di idrogeno (ovviamente scorretto dal punto di vista quantistico!) prevede che il protone sia fisso nello spazio, e l'elettrone ci ruoti attorno compiendo **un'orbita circolare uniforme** di raggio $a = 5\text{x}10^{-11}$ m come in figura. A questo movimento si può associare una corrente elettrica stazionaria I, e il modello, ai fini delle domande di questo problema, corrisponde ad una spira circolare percorsa da questa corrente. Per le risposte, usate il sistema di riferimento in figura, dove si vede che l'orbita appartiene al piano XY e che il senso di percorrenza è orario.



   a) Sapendo che la carica dell'elettrone vale $e = -1.6\text{x}10^{-19}$ C e supponendo che l'orbita venga percorsa con una velocità angolare $\omega = 3.9\text{x}10^{15}$ rad/s, quanto vale la corrente I? [Suggerimento: per rispondere, immaginate di traguardare un punto dell'orbita e di misurare quanta carica passa in un dato intervallo di tempo]
   I = …………………………………... = ………. A $|e|/(2\pi/\omega) = 1.0$ mA [si ottiene semplicemente da $I = |e|/T$, T essendo il periodo dell'orbita circolare]

   b) Quanto vale il **momento magnetico** μ dell'atomo in direzione, verso e modulo?
   Direzione e verso: …………………………… verso positivo dell'asse Z in figura [occhio: la carica dell'elettrone è negativa, e quindi la corrente, definita come flusso di cariche positive, gira in senso opposto; applicando la regola della mano destra si ottiene il risultato]
   μ = …………………………………... = ………. A m² $I\,\pi\, a^2 = 1.6\text{x}10^{-15}$ A m²

c) Questo semplice modello permette di interpretare grossolanamente alcuni aspetti di **magnetismo nella materia** (ad esempio, il comportamento di un materiale magnetizzato – un pezzo di calamita – può essere illustrato classicamente sulla base di "correnti elettroniche" di questo tipo). Determiniamo quindi il campo magnetico prodotto dalla nostra corrente, cominciando con il suddividere la "spira" in tanti elementini di lunghezza d***l***. Quanto vale in modulo il contributo al campo magnetico d***B****(z)* generato da d***l*** in un punto appartenente all'asse ortogonale all'orbita (l'asse *Z* di figura) e posto ad una distanza *z* generica dal piano dell'orbita? Che direzione e verso ha? [Dovete esprimere la dipendenza funzionale usando i dati del problema, niente numeri! Potete anche fare un disegnino]

d$B(z)$ = …………………………………... $(\mu_0/4\pi)\, I\, \mathrm{d}l / (z^2 + a^2)$ [dalla "relazione costitutiva" del campo magnetico a partire dalle correnti, notando che la distanza tra il punto considerato ed un elementino d*l* di spira vale, per il teorema di Pitagora, $(z^2 + a^2)^{1/2}$]

Direzione e verso: …………………………… direzione ortogonale rispetto a d***l*** e alla congiungente ***r*** tra d***l*** e il punto sull'asse, verso dato dalla regola della mano destra – fate il disegnino!

d) Quanto vale la componente dB_z lungo l'asse *Z* del contributo infinitesimo di cui sopra?

d$B_Z(z)$ = …………………………………... $\mathrm{d}B(z)\, z/(z^2 + a^2)^{1/2}$ [dalla trigonometria]

e) Quanto in direzione, verso e modulo il campo magnetico ***B****(z)* generato da tutti gli elementini di spira?

Direzione e verso: …………………………… verso positivo dell'asse *Z*: tutti i contributi ortogonali all'asse *Z* si annullano quando si considerano elementini di spira diametralmente opposti

$B(z)$ = …………………………………... $(\mu_0/2)\, I\, az / (z^2 + a^2)^{3/2}$ [viene integrando il contributo infinitesimo della risposta d); notate che questo contributo infinitesimo non dipende dalla variabile di integrazione, per cui l'integrale si fa semplicemente moltiplicando per la lunghezza, ovvero la circonferenza $2\pi a$, della spira!]

f) Supponendo ora che il nostro modellino atomico sia interessato da un campo magnetico **esterno** costante ed uniforme $\boldsymbol{B_0} = (b, 0, b)$, con $b = 1.0\mathrm{x}10^{-3}$ T, quanto vale in modulo il momento delle forze *M* che agiscono sulla spira, calcolato rispetto all'asse *Y* ?

M = …………………………………... = ……….. N m $\mu\, b = 1.6\mathrm{x}10^{-18}$ N m [viene dal prodotto vettoriale tra momento magnetico e campo esterno]

g) Commentate sulla (o sulle) eventuali posizioni di equilibrio per la rotazione della spira (attorno all'asse *Y*) indotta dal momento delle forze:

……………………………………….. per avere equilibrio dei momenti delle forze occorre che sia nullo il prodotto vettoriale, cioè che il momento magnetico sia parallelo o antiparallelo rispetto al campo esterno; considerazioni energetiche (che non abbiamo fatto) mostrano che nel primo caso l'equilibrio è instabile, nel secondo è stabile. Dunque preferenzialmente gli atomi del nostro modello tendono ad orientarsi in modo che la loro orbita sia ortogonale al campo esterno ("polarizzazione per orientamento").