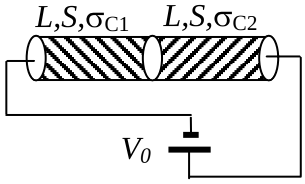
ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 36/07

1. Nel semispazio $z < 0$ sono presenti un campo elettrico $\boldsymbol{E_1}$ ed un campo magnetico $\boldsymbol{B_1}$. Entrambi questi campi sono statici ed uniformi nel semispazio considerato, ed hanno componenti solo nel piano *XZ*, di valore (noto) rispettivamente E_{1X}, E_{1Z} e B_{1X}, B_{1Z}. Il piano $z = 0$ è occupato da una superficie di interfaccia sulla quale è presente una densità di carica superficiale **uniforme** σ (nota). Inoltre su questa superficie scorre una corrente superficiale *I'* (nota) che si muove in direzione *Y* positiva. [Notate che la corrente superficiale *I'* rappresenta un'intensità di corrente per unità di lunghezza, lungo *Y*, della superficie. In sostanza essa ha unità di misura A/m]
   a) Come si esprimono le componenti E_{2X}, E_{2Z} del campo elettrico $\boldsymbol{E_2}$ che si misura nel semispazio $z>0$?
   E_{2X} = …………………………………... E_{1X} [le componenti *X* sono ovviamente **parallele** alla superficie di interfaccia. Ricordando le condizioni di continuità si ottiene immediatamente il risultato. Se non vi ricordate queste condizioni, è sufficiente eseguire la circuitazione del campo elettrico su una linea chiusa rappresentata da un rettangolo che ha due lati (di lunghezza *L*) paralleli all'asse *X* e collocati nei due semispazi, e due lati di lunghezza *L'*<<*L* paralleli all'asse *Z*. La circuitazione, secegliendo un verso tale che il lato nel semispazio $z<0$ sia concorde con E_{1X}, si scrive $E_{1X}L - E_{2X}L = (E_{1X}-E_{2X})L$, dove abbiamo sfruttato il fatto che il lati di lunghezza *L* sono paralleli all'asse *X* e che quelli di lunghezza *L'* danno un contributo tendente a zero se *L'* tende a zero. Poiché la circuitazione deve essere nulla, si ha il risultato. Osssrvate che il campo elettrrico sarà uniforme anche nel semispazio $z>0$, non essendoci nessuna ragione perché non lo sia! Inoltre esso non avrà componente *Y*, come nel semispazio $z<0$]
   E_{2Z} = …………………………………... $E_{1Z}+\sigma/\varepsilon_0$ [le componenti *Z* sono ovviamente **ortogonali** alla superficie di interfaccia. Ricordando le condizioni di continuità si ottiene immediatamente il risultato. Se non vi ricordate queste condizioni, è sufficiente applicare il teroema di Gauss ad una scatola (chiusa!) con le superfici di base parallele al piano *XY* (supponiamo di area ΔS) e con un'altezza (in direzione *Z*) arbitrariamente bassa, tale da avere flusso solo attraverso le superfici di base. Essendo la carica contenuta nella scatola pari a $\sigma\Delta S$, e notando che le normali alle superfici di base sono entrambi lungo l'asse *Z* ma orientate in verso opposto l'un l'altra (lungo $-z$ per la superficie nel semispazio $z<0$ e lungo z per quella nel semispazio $z>0$) si ha $E_{2Z}\Delta S - E_{1Z}\Delta S = \sigma\Delta S/\varepsilon_0$, da cui la soluzione]
   b) Come si esprimono le componenti B_{2X}, B_{2Z} del campo magnetico $\boldsymbol{B_2}$ che si misura nel semispazio $z>0$?
   B_{2X} = …………………………………... $B_{1X}\pm\mu_0 I'$ [le componenti *X* sono ovviamente **parallele** alla superficie di interfaccia. Ricordando le condizioni di continuità si ottiene immediatamente il risultato. Se non vi ricordate queste condizioni, è sufficiente eseguire la circuitazione del campo magnetico su una linea chiusa rappresentata da un rettangolo che ha due lati (di lunghezza *L*) paralleli all'asse *X* e collocati nei due semispazi, e due lati di lunghezza *L'*<<*L* paralleli all'asse *Z*. La circuitazione, secegliendo un verso tale che il lato nel semispazio $z<0$ sia concorde con B_{1X}, si scrive $B_{1X}L - B_{2X}L = (B_{1X}-B_{2X})L$, dove abbiamo sfruttato il fatto che il lati di lunghezza *L* sono paralleli all'asse *X* e che quelli di lunghezza *L'* danno un contributo tendente a zero se *L'* tende a zero. Secondo il teorema di Ampere, la circuitazione deve essere pari a $\mu_0 I_{CONC}$, dove la corente concatenata è pari a *I'L* (ricordate la definizione di *I'* come densità lineare di corrente superficiale!). Da qui il risultato, dove il segno ± tiene conto del fatto che, sulla base dei dati del problema, non si può stabilire se il verso della corrente è "compatibile" (secondo la legge del pugno destro) con quello della circuitazione che è stato scelto aribitrariamente. Osssrvate che il campo magnetico sarà uniforme anche nel semispazio $z>0$, non essendoci nessuna ragione perché non lo sia!]
   B_{2Z} = …………………………………... B_{1X} [le componenti *Z* sono ovviamente **ortogonali** alla superficie di interfaccia. Ricordando le condizioni di continuità si ottiene immediatamente il risultato. Se non vi ricordate queste condizioni, è sufficiente utilizzare l'equazione di Maxwell (corrispondente al teorema di Gauss, ma riferita al campo magnetico) del flusso di $\boldsymbol{B}$ ed applicarla, cioè calcolare il flusso del campo magnetico, ad una scatola (chiusa!) con le superfici di base parallele al piano *XY* (supponiamo di area ΔS) e con un'altezza (in direzione *Z*) arbitrariamente bassa, tale da avere flusso solo attraverso le superfici di base. Notando che le normali alle superfici di base sono entrambi lungo l'asse *Z* ma orientate in verso opposto l'un l'altra (lungo $-z$ per la superficie nel semispazio $z<0$ e lungo z per quella nel semispazio $z>0$) si ha $B_{2Z}\Delta S - B_{1Z}\Delta S = 0$, da cui la soluzione. È facile notare che le condizioni di continuità per le varie compoenti di campo elettrico e magnetico sono "speculari" tra loro!]
   c) Detto $\theta_{1E} = \mathrm{arctg}(E_{1X}/E_{1Z})$ l'"angolo di incidenza" del campo elettrico sulla superficie di interfaccia, come si esprime $\theta_{2E} = \mathrm{arctg}(E_{2X}/E_{2Z})$? [Con un semplice disegnino potrete capire il significato della definizione "angolo di incidenza" (rispetto alla normale all'interfaccia!)]
   $\theta_{2E} = \mathrm{arctg}(E_{2X}/E_{2Z})$ = …………………………………... $\mathrm{arctg}(E_{1X}/(E_{1Z}+\sigma/\varepsilon_0))$ [si ottiene considerando la definizione e il risultato delle risposte al quesito a). Notate che l'angolo cambia se sull'interfaccia è presente della carica (cioè se $\sigma \neq 0$]

2. Nel semispazio $z < 0$ sono presenti un campo elettrico $\boldsymbol{E_1}$ ed un campo magnetico $\boldsymbol{B_1}$. Entrambi questi campi sono uniformi nel semispazio considerato, e sono orientati rispettivamente in direzione *X* ed in direzione *Y* (sono ortogonali fra loro ed ortogonali al piano *XY*). Si sa inoltre che nel semispazio $z > 0$ **non** sono presenti campi (né elettrici né magnetici!), cioè per $z > 0$ ci si trova all'interno di un materiale "opaco". Si può inoltre assumere che i campi che si trovano nel semispazio $z > 0$ siano completamente determinati dai campi nel semispazio $z < 0$ e dalle cariche elettriche (ferme o in movimento!) che si trovano all'interfaccia, cioè sul piano *XY*.
   a) Quanto vale la densità di carica superficiale σ che si deve trovare all'interfaccia?
   σ = …………………………………... 0 [il campo elettrico $\boldsymbol{E_1}$ è parallelo all'interfaccia; le condizioni di continuità implicano che sia possibile avere un campo nullo per $z > 0$ con una carica nulla all'interfaccia]
   b) Quanto vale, in modulo, la densità lineare di corrente superficiale *I'* che si deve trovare all'interfaccia?
   I' = …………………………………... B_1/μ_0 [il campo magnetico $\boldsymbol{B_1}$ è parallelo all'interfaccia; le condizioni di continuità implicano che, per avere un campo nullo al di là dell'interfaccia, è necessario che sul piano scorra una corrente tale che $B_1 L=\mu_0 I$, da cui la soluzione $I'=I/L$ (si veda anche la risposta al quesito b) dell'esercizio precedente!). Questa corrente deve scorrere in direzione *X* , con verso

determinato dalla regola della mano destra. Osservate che i risultati di questo esercizio possono essere esportati anche al caso non stazionario: infatti questi risultati sono alla base della spiegazione della riflessione totale da parte della sueprficie di un buon conduttore!]

3. Un resistore elettrico è costituito da due cilindri di materiali conduttori **omogenei**, con conducibilità rispettivamente σ_{C1} e σ_{C2} attaccati l'un l'altro attraverso le superfici di base, come rappresentato in figura. Le aree delle sezioni dei due cilindri sono uguali, e valgono S, ed uguale è anche la loro lunghezza, che vale L . Le due facce esterne del sistema sono collegate ad un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 (vedi figura).



a) Come si esprime la corrente I fornita dal generatore in condizioni stazionarie?

I = …………………………………... $V_0/R = V_0/(R_1+R_2) = V_0S/(L(1/\sigma_{C1}+1/\sigma_{C2}))$[i due cilindri si comportano come due resistori in serie. Per ognuno dei due, vista la geometria del sistema, si può scrivere $R = L/(\sigma_C S)$, da cui la soluzione]

b) Quanto valgono, in modulo, le densità di corrente j_1 e j_2 nei due cilindri? [Esprimete il solo modulo: si intende che direzione e verso sono quelli della corrente, cioè assiale dal "polo positivo" al "polo negativo"; si intende anche che la corrente scorre uniformemente all'interno di ogni cilindro]

j_1 = …………………………………... $I/S= V_0/(L(1/\sigma_{C1}+1/\sigma_{C2}))$ [vista la geopmeria e la ragionevole ipotesi di uniformità della corrente, dovendo il flusso di $\boldsymbol{j}$ essere uguale all'intensità di corrente si ottiene la soluzione]

j_2 = …………………………………... $j_1=I/S= V_0/(L(1/\sigma_{C1}+1/\sigma_{C2}))$ [la corrente che passa nel cilindro 1 deve passare anche nel cilindro 2, per cui, essendo le sezioni uguali, si ottiene il risultato]

c) Quanto valgono, in modulo, i campi elettrici E_1 e E_2 nei due cilindri? [Esprimete il solo modulo e applicate ragionevoli approssimazioni di uniformità]

E_1 = …………………………………... $j_1/\sigma_{C!} = V_0/(L(1 + \sigma_{C1}/\sigma_{C2}))$ [dalla "legge di Ohm microscopica" $\boldsymbol{j} = \sigma_C \boldsymbol{E}$]

E_2 = …………………………………... $j_2/\sigma_{C2} = V_0/(L(1 + \sigma_{C2}/\sigma_{C1}))$ [come sopra; notate che il **campo elettrico non ha lo stesso valore** nei due cilindri, dunque "non si conserva" (mentre "si conserva" la corrente!]

d) Come si esprime, se esiste, la densità di carica superficiale σ che si viene a trovare, in condizioni stazionarie, sulla superficie di interfaccia (cioè di contatto) tra i due cilindri?

σ = …………………………………... $(E_2-E_1)\varepsilon_0 = (V_0/L)(1/(1+ \sigma_{C2}/\sigma_{C1}) =1/(1+ \sigma_{C1}/\sigma_{C2})) = (V_0/L)(\sigma_{C!} - \sigma_{C2})/ (\sigma_{C!}+\sigma_{C2})$ [i campi elettrici in tutte e due i cilindri sono ortogonali al piano di interfaccia; dunque la loro discontinuità può essere immediatamente legata alla densità di carica superficiale (se non vi ricordate la condizione di continuità potete applicare Gauss ad un barattolo con le due superfici di base all'interno dei due cilindri, e quindi...]

4. Un sistema è costituito da due superfici cilindriche (gusci sottili) coassiali di altezza h e raggi rispettivamente a e b (con $b>a$ e $h>>a,b$). Le due superfici sono collegate ad un generatore ideale di differenza di potenziale V_0.

a) Come si esprime la carica Q accumulata sulle superfici? [Esprimetela in modulo: le die superfici sono armature di un condensatore e quindi le cariche sono uguali e opposte!]

Q = …………………………………... $V_0\, 2\pi\varepsilon_0 h/\ln(b/a)$ [si tratta di un condensatore cilindrico la cui capacità può essere determinata notando che il campo fra le armature è radiale ed ha espressione $E(r) = Q/(2\pi\varepsilon_0 hr)$ (si trova con Gauss!) e imponendo che la differenza di potenziale sia quella data, cioè $V_0 = -\int E(r)dr$. Si rimanda alla soluzione di altri esercizi per i dettagli!]

b) Se si suppone che la superficie cilindrica di raggio a (quella "interna") venga messa in rotazione attorno al suo asse con velocità angolare costante ω, cosa si verfica a livello di campi? Commentate.

Commento: .... Poiché l'armatura è carica, quando viene messa in movimento si crea una corrente la cui intensità può essere determinata notando che occorre un periodo $T = 2\pi/\omega$ per compiere un giro completo. In questo periodo la carica Q passa per una linea immaginaria parallela all'asse e posta sulla superficie del cilindro. Dunque la corrente vale semplicemente $I = Q/T$. Questa corrente fluisce in direzione "tangenziale" esattamente come nel caso di un solenoide, Si crea allora un campo **magnetico** nella regione **interna** al guscio, cioè per $r<a$. Supponendo che il guscio sia molto alto (o lungo), il campo è assiale ed uniforme, e la sua intensità, determinata con il teorema di Ampere, vale $B = \mu_0 I/h = \mu_0 Q/(Th)$. Notate che per $r>a$ non c'è nessun cambiamento nei campi.

c) Supponete ora che la superficie cilindrica sia ferma, ma che lo spazio fra le armature sia riempito con un materiale debolemente conduttore, di conducibilità σ_C. Cosa cambia in questo caso a livello di corrente erogata dal generatore? Commentate.

Commento: .... Il sistema si comporta come un parallelo di condensatore e resistore, quest'ultimo dovuto al fatto che c'è passaggio di corrente (attraverso il materiale!) tra le armature in condizioni stazionarie. Per il calcolo della corrente, si può notare che deve essere per definizione $I = \int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}dS = \sigma_C \int \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS$. Essendo il campo radiale (vedi risposta al quesito a)), conviene integrare su una superficie cilindrica coassiale ai gusci e di raggio r generico (con $a<r<b$); la normale $\boldsymbol{n}$ a questa superficie èd radiale, cioè parallela al campo. Inoltre il campo è uniforme su tutta la superficie, per cui si ottiene: $I = \sigma_C E 2\pi rh$. Inserendo l'espressione del campo determinata con Gauss (vedi sopra), si ottiene $I = \sigma_C Q/\varepsilon_0 = \sigma_C V_0 2\pi h/\ln(b/a)$. Da qui si ricava anche che la resistenza del sistema è $R = V_0/I = \ln(b/a)/2\pi h\sigma_C$ (notate che a questo risultato non si può giungere se si prescinde da un'adeguata trattazione della geometria del sistema!)