ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 38/07

1. Un lungo solenoide, che ha raggio a e lunghezza h (con $h>>a$) è formato da N spire di filo conduttore. Il filo presenta una resistenza elettrica R al passaggio della corrente ed i suoi estremi sono collegati ad un generatore ideale di differenza di potenziale alternata $V(t) = V_0 cos(\omega t)$, con ω "né troppo piccolo, né troppo grande" (vuol dire che la variazione temporale della differenza di potenziale non è trascurabile, ma non ci si trova nel regime delle onde elettromagnetiche). [Indicate con ε_0 e μ_0 la costante dielettrica e la permeabilità magnetica del mezzo, il vuoto, che si trova all'interno del solenoide]
   a) Come si scrive, in modulo e direzione, il campo magnetico $B(t)$ che interessa la regione interna al solenoide? [Usate le consuete approssimazioni del solenoide di lunghezza "infinita" e tenete conto del fatto che ω è "ragionevolmente" piccola]
   $B(t)$ = …………………………………... $\mu_0 IN/h = \mu_0 V_0 cos(\omega t)N/(Rh)$ [il solenoide è attraversato da una corrente $I(t)=V(t)/R$, da cui, applicando le note conseguenze del teorema di Ampere, si ottiene la soluzione. L'approccio usato può essere definito "quasi-stazionario", dato che non ci si interessa, per il momento, degli effetti dell'induzione magnetica]
   Direzione: .... assiale (il campo è presente solo all'interno del solenoide, dove è considerato uniforme]

   b) Sapendo che la **densità di energia magnetica**, cioè l'energia (per unità di volume) dovuta alla presenza del campo magnetico, vale $u_M = B^2/(2\mu_0)$, come si scrive l'energia magnetica $U_M(t)$ "immagazzinata" nel solenoide?
   $U_M(t)$ = …………………………………... $(B^2/(2\mu_0))\pi a^2 h = \mu_0 V_0^2 cos^2(\omega t)N^2 a^2 \pi /(R^2 h)$ [l'energia si ottiene integrando nel volume la densità di energia; notando che il campo è uniforme, e quindi uniforme è anche la densità di energia, si ottiene il risultato]

   c) Come si scrive il valore medio nel tempo dell'energia magnetica $\langle U_M \rangle$?
   $\langle U_M \rangle$ = …………………………………... $\mu_0 V_0^2 N^2 a^2 \pi /(2R^2 h)$ [la media nel tempo dell'espressione determinata al punto precedente presuppone la media nel tempo della funzione $cos^2(\omega t)$, che fornisce, come noto, un valore ½ (si può facilmente dimostrare!)]

   d) Sapendo che la definizione di **autoinduttanza** è $L = \Phi_S(\mathbf{B})/I$, dove il flusso è calcolato sulla sezione del solenoide e la corrente è quella che scorre nel solenoide, come si scrive l'autoinduttanza L del solenoide considerato? [Tenete conto del numero delle spire!]
   L = …………………………………... $\mu_0 \pi a^2 N^2/h$ [il flusso concatenato con una singola spira del solenoide si esprime, tenendo conto del fatto che $\mathbf{B}$ è assiale ed uniforme, $\Phi'_S(\mathbf{B}) = \pi a^2 B = \pi a^2 \mu_0 IN/h$. Tenendo conto che il numero delle spire è N, il flusso complessivo concatenato con tutto il solenoide è $N \Phi'_S(\mathbf{B})$, da cui la soluzione]

   e) Come si scrive la forza elettromotrice $fem(t)$ che viene indotta sul filo che costituisce il solenoide?
   $fem(t)$ = …………………………………... $-d\Phi_S(\mathbf{B})/dt = -L\, dI/dt = (L/R)V_0\, \omega sin(\omega t)$ [per la legge di Faraday; nella soluzione si è espressa la corrente che effettivamente passa attraverso il solenoide secondo quanto determinato sopra, e si è eseguita la derivata temporale]

   f) Come si scrive l'"equazione del circuito" considerato? [Questa domanda richiede di scrivere un'equazione in termini "elettrotecnici", in cui si considerano gli elementi del problema come componenti circuitali]
   $V(t)$ = …………………………………... $RI(t) + L\, dI(t)/dt$ [dal punto di vista circuitale, il sistema considerato è equivalente al collegamento in serie di un resistore R e di un induttore L , collegato al generatore $V(t)$. Dunque in ogni istante la differenza di potenziale prodotta dal generatore deve essere uguale alla somma della "caduta di tensione" sulla resistenza, $RI(t)$, e della forza elettromotrice (auto)indotta sul solenoide, la $fem(t)$ che abbiamo determinato al quesito e). L'equazione che si ottiene è un'equazione differenziale al primo ordine che contiene un termine "dissipativo" (il termine $RI(t)$). Infatti se supponessimo di togliere istantaneamente il generatore, cioè di annullare la differenza di potenziale ai capi dello stesso, otterremmo la stessa equazione di fferenziale che descrive, ad esempio, il moto in presenza di attrito viscoso (o la scarica di un condensatore), che notoriamente sono fenomeni dissipativi. La costante tempo associata a questi fenomeni dissipativi vale L/R, come potete facilmente verificare risolvendo l'equazione differenziale nel caso $V(t) = 0$]

2. Un circuito è costituito dal collegamento in serie di un solenoide, dotato di un'**autoinduttanza** con coefficiente L (vedi l'esercizio precedente per ulteriori dettagli), con un condensatore di capacità C.

a) Come si scrive l'"equazione del circuito"?

……………………………………... $0 = Q/C – LdI/dt$ [le differenze di potenziale ai capi dei due elementi, che sono gli unici componenti del circuito (non ci sono generatori, resistenze, o altro) devono essere uguali tra loro. Ricordando che la *fem* indotta ai capi del solenoide ha espressione LdI/dt e che la differenza di potenziale tra le armature di un condensatore è legata alla carica che si trova sulle armature e alla capacità attraverso la relazione Q/C, si ottiene la soluzione]

b) Supponendo che, per qualche motivo, all'istante $t_0 = 0$ sulle armature del condensatore si trovi la carica Q_0 , come si può dedurre l'andamento temporale della carica elettrica sulle stesse armature, $Q(t)$? Commentate!

Commento: …………………………………... notando che la corrente che fluisce nel solenoide è legata alla variazione della carica che si trova sulle armature attraverso la relazione $I(t) =- dQ(t)/dt$ (la corrente è creata dalla carica che **lascia** l'armatura!), l'equazione del circuito si può scrivere come: $0 = Q(t)/C + Ld^2Q(t)/dt^2$, ovvero: $d^2Q(t)/dt^2 = -Q(t)/(LC)$. Questa equazione differenziale del secondo ordine dà luogo, come ben sapete!, ad una soluzione oscillante del tipo $Q(t) = Q_0 cos(\omega t)$ ("aggiustata" per le condizioni iniziali del problema). Dunque la soluzione è oscillatoria, con pulsazione $\omega = (1/(LC))^{1/2}$. Notate che in questa oscillazione si ha un continuo "trasferimento" di energia dal condensatore (dove l'energia è immagazzinata sotto forma di energia elettrostatica) al solenoide (dove invece l'energia ha forma "magnetica")

3. Un'onda elettromagnetica monocromatica piana di lunghezza d'onda $\lambda = 1.0\text{x}10^{-6}$ m si propaga nel vuoto lungo il verso positivo dell'asse *X*. L'onda è polarizzata linearmente lungo *Y* (cioè il suo campo elettrico oscilla lungo *Y*) ed è tale da avere ampiezza nulla sul piano $x = 0$ all'istante $t = 0$ (questa considerazione serve per aggiustare la fase costante della funzione d'onda).

a) Scrivete la funzione d'onda per il campo elettrico $\boldsymbol{E}$ in termini dell'ampiezza E_0, del vettore d'onda $\boldsymbol{k}$ e della pulsazione ω. [Ricordate che si tratta di un vettore!]

$\boldsymbol{E}$ = ………………………………………......... $E_0 cos(kx-\omega t + \pi/2)\boldsymbol{y} = E_0 sin(kx-\omega t)\boldsymbol{y}$ [si tratta di un'onda piana, monocromatica, progressiva, polarizzata lungo la direzione *Y* secondo quanto stabilito nel testo. Il valore della fase costante si pone pari a $\pi/2$ in modo tale che sul piano $x = 0$ si abbia $E = 0$ all'istante $t = 0$, secondo quanto stabiltio nel testo]

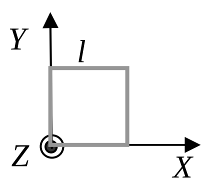
b) Come si scrive la funzione d'onda per il campo magnetico $\boldsymbol{B}$ in termini dei dati del problema?

$\boldsymbol{B}$ = ………………………………………......... $B_0 cos(kx-\omega t + \pi/2)\boldsymbol{z} = (E_0/c)sin(kx-\omega t)\boldsymbol{z}$ [direzione di propagazione, campo elettrico e campo magnetico devono formare una terna ortogonale destrorsa (compatibile con la regola della mano destra). Inoltre la funzione d'onda deve avere lo stesso andamento funzionale con tempo e posizione, e, trattandosi di propagazione nel vuoto, deve valere la relazione $B = E\, c$, da cui la soluzione]

c) Quanto vale la frequenza ν dell'onda? [Ricordate che la velocità della luce vale $c = 3.0\text{x}10^8$ m/s]

ν = …………………………………… = ... Hz $c/\lambda = 3\text{x}10^{14}$ Hz [l'onda si propaga a velocità della luce, dato che siamo nel vuoto, e la relazione da usare è quella indicate]

d) Sul piano *YZ* è posta una spira conduttrice quadrata di lato $l = 1.5\text{x}10^{-6}$ m con un lato disposto lungo l'asse *Y* (vedi figura). La spira ha resistenza $R = 1.0$ ohm. Per effetto della presenza dell'onda elettromagnetica, all'interno della spira, che funge da "antenna", scorre una corrente elettrica periodica che, al massimo, vale $I_{MAX} = 3.0$ mA. Quanto vale l'ampiezza E_0 dell'onda? [Date la risposta numerica usando l'unità di misura V/m]



E_0 = …………………………………… = …....... V/m $RI_{MAX} /(2l) = 1.0\text{x}10^3$ V/m [facendo la circuitazione del campo elettrico sulla spira, che ha lato pari a $3\lambda/2$, si ottiene che la differenza di potenziale vale $2E_0 \sin(\omega t)\, l$, la corrente $(2E_0 \sin(\omega t)\, l)/R$ ed il valore massimo di questa funzione è proprio $2E_0 l/R$, da cui la risposta. In linea di principio si può arrivare alla stessa risposta ragionando in termini di legge di Faraday, ma il calcolo del flusso del campo magnetico]