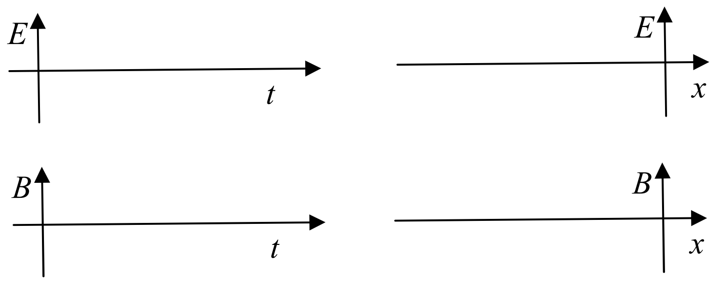
ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 39/07

1. Un'onda piana monocromatica e progressiva generata da un laser che opera nell'intervallo spettrale del rosso ha lunghezza d'onda λ = 628 nm e si propaga nel vuoto lunga la direzione X di un dato riferimento cartesiano.

   a) Quanto valgono frequenza ν, frequenza angolare ω, periodo T e vettore d'onda $\mathbf{k}$ (componente per componente) dell'onda? [Usate il valore $c = 3.0\text{x}10^8$ m/s per la velocità della luce]
   ν = ………………………………….. = ... Hz $c/\lambda = 4.8\text{x}10^{14}$ Hz
   ω = ………………………………….. = ... rad/s $2\pi\nu = 3.0\text{x}10^{15}$ rad/s
   T = ………………………………….. = ... s $\lambda/c = 2.1\text{x}10^{-15}$ s
   $\mathbf{k}$ = (……..,……..,………) = (……..,……..,………) 1/m $(2\pi/\lambda, 0, 0) = (1.0\text{x}10^7\ 0, 0)$ 1/m

   b) Sapendo che all'istante $t = \pi/(2\ \omega)$ sul piano $X = 0$ il campo elettrico associato all'onda assume il suo **valore massimo**, corrispondente ad una ampiezza E_0 = 3.0 V/m, e che l'onda è "polarizzata linearmente", cioè che i campi elettrico e magnetico hanno sempre, istante per istante, una direzione lineare, scrivete le funzioni d'onda per il campo elettrico $\mathbf{E}$ e per il campo magnetico $\mathbf{B}$ dell'onda. [Scegliete arbitrariamente le direzioni dei campi, ma tenendo conto delle opportune condizioni!]
   $\mathbf{E}$ = ………………………………….. = ... V/m $E_0\ sin(\omega t - kx)\mathbf{y} = 3.0\ sin(3.0\text{x}10^{15}\ t - 1.0\text{x}10^7 x)\mathbf{y}$ V/m , con $\mathbf{y}$ versore dell'asse Y [la scelta della funzione seno permette di soddisfare la condizione iniziale che il campo sia massimo all'istante considerato; sarebbe andata bene anche una funzione coseno, ma in questo caso sarebbe stato necessario aggiungere una fase costante $\phi = \pi/2$ nell'argomento della funzione. La scelta della direzione di polarizzazione, che qui è l'asse Y, è arbitraria ma soddisfa la condizione di ortogonalità rispetto alla direzione di propagazione]
   $\mathbf{B}$ = ………………………………….. = ... T $(E_0/c)\ sin(\omega t - kx)\mathbf{z} = 1.0\text{x}10^{-8}\ sin(3.0\text{x}10^{15}\ t - 1.0\text{x}10^7 x)\mathbf{z}$ T, con $\mathbf{z}$ versore dell'asse Z [il campo magnetico "oscilla in fase" con il campo elettrico e la sua ampiezza massima è data da E_0/c ; la scelta della direzione del campo magnetico (lungo Z) è in accordo con quella del campo elettrico, dato che direzione di propagazione, campo elettrico e campo magnetico formano, **istante per istante**, una "terna destrorsa", cioè sono pollice, indice, medio della mano destra]

   c) Disegnate i grafici di E e di B (cioè dell'**ampiezza** del campo elettrico e magnetico) in funzione di x a diversi istanti t (ad esempio t = 0, $T/4$, $T/2$, T, $2T$, ...) e in funzione di t su diversi piani YZ (ad esempio, x = 0, x = - $\lambda/4$, - $\lambda/2$, – λ, – 2λ, ...). Individuate nei grafici il periodo e la lunghezza d'onda.



   [tutte funzioni seno traslate rigidamente in modo diverso. Periodo e lunghezza d'onda sono le "distanze" tra punti consecutivi in cui la funzione ha lo stesso valore nei grafici rispettivamente in funzione del tempo e dello spazio]

   d) Supponete ora che il piano x = 0 rappresenti la superficie di una lastra di materiale perfettamente conduttore (cioè che esibisce la proprietà di riflettere completamente un'onda incidente). Quanto deve valere il campo elettrico $\mathbf{E}_+$ nel semispazio $x \geq 0$?
   $\mathbf{E}_+$ = …………………………………..   0, come nel caso statico di conduttore all'equilibrio

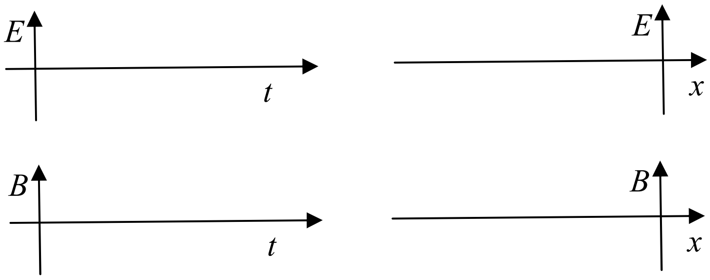
   e) Come si scrivono le funzioni d'onda del campo elettrico $\mathbf{E_R}$ e del campo magnetico $\mathbf{B_R}$ dell'**onda riflessa**? [Si intende che l'onda riflessa esiste solo nel semispazio $x < 0$]
   $\mathbf{E_R}$ = ………………………………….. $-E_0\ sin(\omega t + kx)\mathbf{y}$ [il segno positivo del termine kx indica che l'onda si muove nel verso negativo dell'asse X; il segno negativo messo davanti ad E_0 garantisce che $\mathbf{E}_{TOT}$ = 0 ad x = 0 per ogni istante t, come deve essere per soddisfare la condizione di cui al punto d)
   $\mathbf{B_R}$ = ………………………………….. $(E_0/c)\ sin(\omega t + kx)\mathbf{z}$ [attenzione! Per il campo magnetico totale non esiste la condizione del punto d), e la funzione d'onda si trova utilizzando il legame "generico" tra $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ per onde elettromagnetiche piane progressive. La considerazione sulla terna destrorsa che deve essere formata da $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ porta a mettere un segno positivo davanti all'ampiezza (E_0/c)]

f) Quanto valgono il campo elettrico $\boldsymbol{E}_{TOT}$ e il campo magnetico $\boldsymbol{B}_{TOT}$ **totali** nel semispazio $x < 0$? [Ricordate l'identità trigonometrica $sin(\alpha\pm\beta) = sin\alpha cos\beta \pm cos\alpha sin\beta$]

$\boldsymbol{E}_{TOT}$ = …………………………………….. $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E_R} = E_0\, sin(\omega t - kx)\boldsymbol{y} - E_0\, sin(\omega t + kx)\boldsymbol{y} = E_0\, (sin(\omega t)cos(kx) - cos(\omega t)sin(kx) - sin(\omega t)cos(kx) - cos(\omega t)sin(kx))\, \boldsymbol{y} = -2\, E_0\, cos(\omega t)sin(kx)\boldsymbol{y}$

$\boldsymbol{B}_{TOT}$ = …………………………………….. $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B_R} = (E_0/c)\, sin(\omega t - kx)\boldsymbol{z} + (E_0/c)\, sin(\omega t + kx)\boldsymbol{z} = (E_0/c)\ (sin(\omega t)cos(kx) - cos(\omega t)sin(kx) + sin(\omega t)cos(kx) + cos(\omega t)sin(kx))\ \boldsymbol{z} = 2\ (E_0/c)\ sin(\omega t)cos(kx)\boldsymbol{z}$

g) Disegnate i grafici di E_{TOT} e di B_{TOT} (cioè dell'**ampiezza** del campo elettrico e magnetico) in funzione di x a diversi istanti t (ad esempio t = 0, $T/4$, $T/2$, T, $2T$, ...) e in funzione di t su diversi piani YZ (ad esempio, $x = 0$, $x = -\lambda/4$, $-\lambda/2$, $-\lambda$, -2λ, ...). Commentate sulle differenze rispetto a quanto trovato nel punto c) per un'onda progressiva:



……………………………………………………

si forma un'onda **stazionaria** , in cui non c'è traslazione rigida della funzione con il passare del tempo (i nodi della funzione d'onda restano sempre nella stessa posizione al passare del tempo, mentre nel caso della domanda c) si muovevano a velocità c nel verso positivo dell'asse X [Si tratta di funzioni seno e coseno la cui ampiezza è modulata in funzione del tempo o della posizione. Notate che sul piano $x = 0$ il campo elettrico è sempre nullo, mentre il campo magnetico ha sempre il suo valore massimo (in modulo). Si dice infatti che campo elettrico e magnetico in un 'onda stazionaria sono "sfasati" di $\pi/2$]

h) Considerate ora il **vettore di Poynting** $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}/\mu_0$ **,** che, come si può facilmente dimostrare, rappresenta la potenza trasportata dall'onda su una superficie unitaria. Quanto valgono i vettori di Poynting $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S_R}$, $\boldsymbol{S_{TOT}}$ rispettivamente per l'onda incidente (quella del punto b)), per l'onda riflessa e per il campo elettromagnetico totale nel semispazio $x < 0$ (quello del punto f))? [Dovete semplicemente eseguire il prodotto vettoriale richiesto ed esprimere anche direzione e verso sfruttando i versori del vostro sistema di riferimento! Può esservi utile ricordare l'identità trigonometrica $2sin\alpha\ cos\alpha = sin(2\alpha)$]

$\boldsymbol{S}$ = …………………………………….. $(E_0^2/(c\mu_0))\ sin^2(\omega t - kx)\boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{S_R}$ = …………………………………….. $-(E_0^2/(c\ \mu_0))\ sin^2(\omega t + kx)\boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{S_{TOT}}$ = …………………………………….. $-4(E_0^2/(c\ \mu_0))\ cos(\omega t)sin(kx)\ sin(\omega t)cos(kx)\boldsymbol{x} = -\ (E_0^2/c)\ sin(2\omega t)sin(2kx)\ \boldsymbol{x}$

i) Quanto valgono le **intensità** I, I_R, I_{TOT} dell'onda dell'onda rispettivamente incidente, riflessa e totale calcolate sul piano $x = -\lambda/2$? [L'intensità di un'onda elettromagnetica è definita come **valore medio** nel tempo del **modulo** del vettore di Poynting; ricordatevi la definizione di valore medio nel tempo per funzioni periodiche come integrale calcolato tra $-T$ e T diviso per $(2T)$] e provate anche a mettere il valore numerico, espresso in W/m^2, usando l'ampiezza del campo data al punto b), ricordando che $c = 1/(\mu_0\varepsilon_0)^{1/2}$ ed impiegando il valore $\varepsilon_0 = 8.8\mathrm{x}10^{-12}$ F/m]

I = …………………………………….. = ... W/m^2 $(1/2T)\ (E_0^2/(c\ \mu_0))\ \int_{-T/2}^{T/2}\ sin^2(\omega t - \pi)\ \mathrm{d}t = (1/2T)\ (E_0^2/(c\ \mu_0))\ \int_{-T/2}^{T/2}\ sin^2(\omega t)\mathrm{d}t = (E_0^2/(2c\ \mu_0)) = c\ \varepsilon_0\ E_0^2/2 = 1.2\mathrm{x}10^{-2}$ W [notate che l'intensità dell'onda risulta pari a c volte la densità di energia media elettromagnetica, cosa che ha una semplice spiegazione fisica

I_R = …………………………………….. = ... W/m^2 I , come si verifica facilmente!

I_{TOT} = …………………………………….. = ... W/m^2 $(1/2T)\ (E_0^2/(c\ \mu_0))\ \int_{-T/2}^{T/2}\ sin^2(2\omega t)cos(2\pi)\ \mathrm{d}t = (1/2T)\ (E_0^2/(c\ \mu_0))\ \int_{-T/2}^{T/2}\ sin^2(2\omega t)\mathrm{d}t = (1/2T)\ (E_0^2/(c\ \mu_0))\ \int_{-T/2}^{T/2}\ sin(\omega t)\ cos(\omega t)\mathrm{d}t = (1/2T)\ (E_0^2/(c\ \mu_0))\ \int_{-T/2}^{T/2}\ sin(\omega t)\mathrm{d}(sin(\omega t)) = (1/2T)\ (E_0^2/(c\ \mu_0))\ (1/2)\ sin^2(\omega t)|_{-T/2}^{T/2} = 0$

[questo risultato **non** dipende dalla scelta del piano su cui si esegue il calcolo, ed è compatibile con il semplice ragionamento per cui l'onda stazionaria è formata da due onde contropropaganti che portano la stessa intensità media in versi opposti]