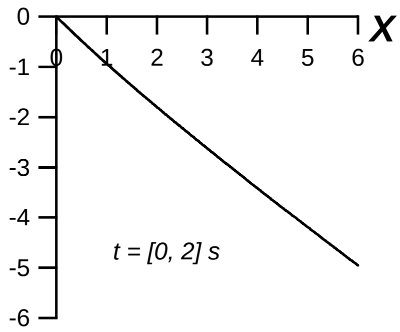
ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 3/07

1. Il moto di un punto, denominato A, si svolge sul piano cartesiano XY con un'accelerazione $\boldsymbol{a}$ = (1.7, -1.0) m/s^2 [l'espressione fra parentesi indica le componenti (a_X, a_Y) dell'accelerazione lungo le due direzioni cartesiane]. All'istante t_0 = 0 il punto A passa per l'origine del sistema di riferimento ed ha una velocità $\boldsymbol{v_0}$ = (2.0, -2.0) m/s.
   a) Che traiettoria percorre il punto A? Provate a disegnarla qualitativamente nel piano riportato qui sotto.
   ☐ rettilinea ☐ parabolica ×☐ "varia" (cioè né l'una né l'altra)
   Spiegazione sintetica della risposta: .... la traiettoria è determinata dalla direzione del vettore velocità che, istante per istante, forma un angolo (misurato rispetto ad X) la cui tangente è $v_Y/v_X = (v_{0Y}+a_Y t)/(v_{0X}+a_X t)$; questo rapporto non resta costante e quindi la traiettoria non è rettilinea e non si tratta neppure di una parabola (si verifica facilmente). Quindi la traiettoria è "varia" (a tempi piccoli, quando domina la velocità iniziale, è rettilinea lungo la bisettrice del quarto quadrante, dato che la tangente vale -1, ma a tempi lunghi, quando il termine $\boldsymbol{a}t$ tende a dominare, si dispone lungo il segmento che forma un angolo di 330 gradi, ovvero -30 gradi, rispetto all'asse X, dato che la tangente vale -1/1.7)

   b) Sullo stesso piano si muove anche un altro punto, denominato B. Il moto di B avviene con una velocità diretta lungo il verso positivo dell'asse X e di modulo v_B; all'istante t_0 il punto B si trova a passare nel punto $\boldsymbol{r_B}$ = (0, -6.0) m. Quanto deve valere v_B se volete che i due punti si incontrino?
   v_B = ... = ... m/s $v_{0X} + (a_X/2)t'$ = 3.4 m/s, essendo t' una delle due soluzioni dell'eq. $v_{0Y}t' + (a_Y/2)t'^2 = y_B$, con y_B coordinata Y iniziale del punto B [si ottiene in due passaggi: prima si trova l'istante "di impatto" t' imponendo che la coordinata Y del punto A coincida con quella di B, costante; quindi, dalla condizione che anche le coordinate X dei due punti devono coincidere, si determina il valore ammissibile di v_B]
   c) Come si esprime, in funzione del tempo, la velocità $\boldsymbol{v'_A}$ del punto A in un sistema di riferimento cartesiano $X'Y'$ solidale al punto B? [Notate che questo sistema di riferimento è inerziale, ed esprimete la velocità componente per componente; scrivete solo l'espressione "letterale"!]
   v'_{AX} = ... $v_{0X} + a_X t - v_B$
   v'_{AY} = ... $v_{0Y} + a_Y t$ [dalla composizione vettoriale delle velocità]

2. Vi trovate sdraiati al suolo ad una distanza d = 9.45 m da un sottile muro verticale di altezza h = 7.00 m (e spessore trascurabile). Da questa posizione scagliate una pallina (da approssimare con un punto materiale!) con una velocità iniziale $\boldsymbol{v_0}$ che forma un angolo θ = 45 gradi rispetto all'orizzontale. Per determinare il moto, considerate i soli effetti dell'accelerazione di gravità diretta verticalmente verso il basso e di modulo g = 9.80 m/s^2, cioè trascurate ogni forma di attrito!
   a) Quanto vale il valore **minimo** del modulo della velocità v_0 affinchè la pallina possa scavalcare il muro? [Ricordate che $\cos\theta = \sin\theta = 0.707$]
   v_0 = ... = ... m/s $d(g/(2\cos\theta\,(d\sin\theta - h\cos\theta)))^{1/2}$ = 9.45 m/s [si determina il tempo $t' = d/(v_0\cos\theta)$ che occorre alla pallina perché la sua coordinata orizzontale corrisponda a quella del muro; quindi si impone che la sua coordinata verticale a questo istante sia (almeno) pari all'altezza del muro, cioè $h = v_0\sin\theta\, t' - (g/2)t'^2$; da qui si ricava v_0]
   b) Quanto vale la componente verticale della velocità della pallina, v_Y, nell'istante in cui essa scavalca il muro?
   v_Y = ... = ... m/s $v_0\cos\theta - gt' = v_0\cos\theta - gd/(v_0\cos\theta)$ = -7.18 m/s [attenzione: la velocità verticale non è nulla, ma negativa, perché la pallina si trova nella fase di discesa nell'istante in cui supera il muro! Provate a fare un disegnino per capire perché]

3. Una "strana" legge oraria del moto per un punto che si muove lungo l'asse X (moto unidimensionale) è del tipo: $x(t) = A\exp(-t/\tau)$. [Nota: l'espressione $\exp(a)$ equivale a e^a, dove con e si indica la "base dei logaritmi naturali", cioè quel numero il cui logaritmo naturale vale 1, $\ln(e) = 1$; provate a graficare la funzione!].
   a) Sapendo che all'istante iniziale t_0 = 0 il punto occupa la posizione $x(t_0) = x_0$ = - 2.0 m, quanto vale il coefficiente A? [Esprimetene anche l'unità di misura!]
   A = ... = ... x_0 = - 2.0 m [notate che $\exp(0)$ = 1!]

b) Come si scrivono le leggi orarie della velocità $v(t)$ e dell'accelerazione $a(t)$? [Per rispondere a questa domanda fa comodo ricordare che per la derivata della funzione esponenziale vale la regola: $d\,exp(f(x))/dx = df(x)/dx\ exp(f(x))$, dove con $f(x)$ si indica una funzione di x, variabile indipendente generica; state attenti a cosa scrivete: è semplice!]
$v(t)$ = ... $dx(t)/dt = -(A/\tau)\ exp(-t/\tau)$
$a(t)$ = ... $dv(t)/dt = (A/\tau^2)\ exp(-t/\tau)$

c) Sapendo che il "tempo caratteristico" vale τ = 5.0 s, quanto valgono velocità ed accelerazione all'istante iniziale, v_0 e a_0? Commentate brevemente sui segni.
v_0 = ... = ... m/s $-(A/\tau) = 4.0\text{x}10^{-1}$ m/s
a_0 = ... = ... m/s^2 $(A/\tau) = -8.0\text{x}10^{-2}$ m/s^2
Breve commento: .... il punto si muove nel verso positivo delle X e "sta rallentando"

4. Un punto si muove sul piano XY seguendo le equazioni del moto: $d^2x(t)/dt^2 = -Ax(t)$; $d^2y(t)/dt^2 = -Ay(t)$ con A = 4.0 s^{-2}.
   a) Sapendo che all'istante t_0 = 0 il punto si trova nel punto x_0 = 0, y_0 = - 3.0 m con velocità iniziale v_{0X} = 8.0 m/s e v_{0Y} = 0, scrivete le leggi orarie del moto per le due coordinate, $x(t)$ e $y(t)$, che sono soluzioni delle equazioni del moto di cui sopra.
   $x(t)$ = ... $-(v_{0X}/\omega)\ sin(\omega t)$, con $\omega = A^{1/2}$
   $y(t)$ = ... $y_0\ cos(\omega t)$ [esce imponendo le condizioni al contorno alla « soluzione generica omogenea » $\alpha cos(\omega t + \delta)$, che va scritta per le due direzioni]
   b) Quanto vale, in funzione del tempo t, il modulo del vettore posizione $r(t)$ del punto?
   $r(t)$ = ... = ... m $(x^2+y^2)^{1/2}=((v_{0X}/\omega)^2+y_0^2)^{1/2}$ =cost. = 5.0 m
   c) Descrivete qui sotto la traiettoria del punto:
   .... essendo costante la somma x^2+y^2, la traiettoria è una circonferenza di raggio r centrata nell'origine, che viene percorsa con velocità angolare costante $\omega = A^{1/2}$ = 2.0 rad/s e verso antiorario. All'istante iniziale il punto si trova nella posizione angolare $\theta = (3/2)\pi$ ed ha la velocità tangenziale specificata nel testo

5. Dato un asse Z nello spazio tridimensionale, per identificare la posizione di un punto si può usare un sistema di riferimento **cilindrico**, in cui le coordinate sono R, θ, z (le prime due sono le ordinarie coordinate di un sistema polare sul piano ortogonale all'asse, mentre z rappresenta la coordinata lungo l'asse). In questo sitema il moto di un punto è descritto dalle coordinate: $R = R_0$; $\theta = \omega t$; $z = (a/2)t^2$, con R_0 = 10 cm, ω = 6.3 rad/s, a = 3.2 m/s^2.
   a) Descrivete la traiettoria del punto:
   .... è un "elica" che si avvolge nel verso positivo dell'asse z, il moto di rotazione essendo antiorario; il "passo dell'elica" non è costante, ma aumenta con il tempo!
   b) In che posizione si trova il punto all'istante t = 0.25 s? [Dovete esprimere la posizione in coordinate **cartesiane** , x, y, z]
   x = ... = ... m y = ... = ... m z = ... = ... m $(R_0 cos(\omega t), R_0 sin(\omega t), (a/2)t^2)$ = (0, $1.0\text{x}10^{-1}$, $1.0\text{x}10^{-1}$) m [notate che il tempo t è circa un quarto di periodo]
   c) Quanto vale, in componenti **cilindriche** a_R, a_θ, a_Z , l'accelerazione del punto allo stesso istante?
   a_R = ... = ... m/s^2 a_θ = ... = ... m/s^2 a_Z = ... = ... m/s^2 $(-\omega^2 R_0, 0, a)$ = (-4.0, 0, 3.2) m/s^2 [nel piano ortogonale all'asse l'accelerazione è centripeta e lungo Z l'accelerazione è uniforme]
   d) Quanto vale, in componenti **cartesiane** a_X, a_Y, a_Z , l'accelerazione del punto allo stesso istante?
   a_X = ... = ... m/s^2 a_y = ... = ... m/s^2 a_Z = ... = ... m/s^2 $(0, -\omega^2 R_0, a)$ = (0, -4.0, 3.2) m/s^2 [viene in modo semplice se si considera come è disposto il vettore posizione all'istante considerato! Notate che l'accelerazione non è solo centripeta, e il vettore accelerazione ha una direzione che non è solo radiale]