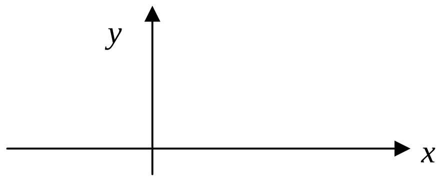
ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 7/07

1. Una carica puntiforme di valore $Q = 1.0\text{x}10^{-10}$ C (uso il simbolo C per indicare l'unità di misura Coulomb) e massa m = 10 g si muove senza attrito su un piano orizzontale XY. Si riscontra che le leggi orarie del moto per le due coordinate sono: $x(t) = At^2$ e $y(t) = Bt$, con $A = 2.0$ m/s^2 e $B = 3.5$ m/s.

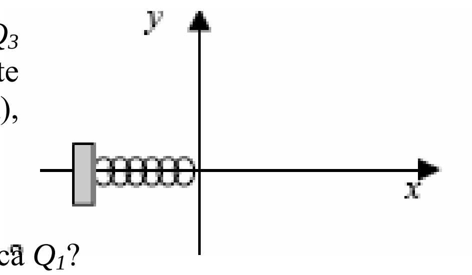
   a) Disegnate approssimativamente la traiettoria della carica nel piano XY e scrivete la funzione $y(x)$ che la rappresenta analiticamente:
   $y(x)$ = ... $(B/A^{1/2})\, x^{1/2}$ [potete riconoscere facilmente che la funzione $x(y)$ è, per $t>0$, un ramo di parabola centrato nell'origine. Da questa considerazione potete facilmente determinare il grafico della traiettoria $y(x)$]



   b) Sapendo che l'**unica** causa fisica del moto della carica è un campo elettrico $\boldsymbol{E}(x,y,t)$ presente in tutti i punti dello spazio (ed eventualmente dipendente da posizione e tempo), quanto valgono le componenti di questo campo, E_X ed E_Y? [Esprimetene il valore nell'unità di misura N/C]
   E_X = ... = ... N/C $F_X/Q = ma_x / Q = m\,2A / Q = 4.0\text{x}10^8$ N/C
   E_Y = ... = ... N/C $F_Y/Q = ma_Y / Q = 0$ [si ottengono in modo molto diretto notando che il moto lungo X è uniformemente accelerato, con accelerazione pari a $2A$, e quindi forza pari a $2Am$, e quindi campo pari a $2Am/Q$; lungo Y, invece, il moto è rettilineo uniforme e non c'è forza!]

   c) In quale posizione $x_0\ y_0$ si trova la carica all'istante $t = 0$, e quanto vale la sua velocità $v_{0X}\ v_{0Y}$ allo stesso istante?
   x_0 = ... = ... m 0 y_0 = ... = ... m 0
   v_{0X} = ... = ... m/s 0 v_{0Y} = ... = ... m/s B = 3.5 m/s
   [si ottiene dalle leggi orarie del moto e dalle considerazioni già fatte sul tipo di moto]

2. Sul piano orizzontale XY disponete 4 cariche elettriche $Q_1 = Q_2 = Q_3 = q$ e $Q_4 = 4q$, con q valore generico di carica. Le posizioni occupate dalle cariche sono le seguenti: $\mathbf{r}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{r}_2 = (0, A)$, $\mathbf{r}_3 = (0, -A)$, $\mathbf{r}_4 = (2A, 0)$, con A valore generico di posizione.
   a) Disegnate il diagramma di corpo libero per la carica Q_1.



   b) Qual è l'espressione vettoriale della forza risultante $\boldsymbol{F}$ sulla carica Q_1?
   $\boldsymbol{F}$ = (..............., ...) $(-\kappa q^2/A^2 , 0)$ [per ragioni di "simmetria" la forze esercitate dalle cariche $Q2$ e $Q3$ si annullano a vicenda]

   c) Quanto vale il **campo elettrico** $\boldsymbol{E}$ generato dalle cariche Q_2, Q_3, Q_4 sulla posizione della carica Q_1?
   $\boldsymbol{E}$ = ... $\boldsymbol{F}/Q_1$

   d) Se disponete una molla di costante elastica k lungo l'asse x come indicato in figura (a mo' di respingente ferroviario...), quanto vale in modulo la sua compressione o allungamento Δl?
   Δl = ... F/k

   O allungamento *X* O compressione O non si può dire

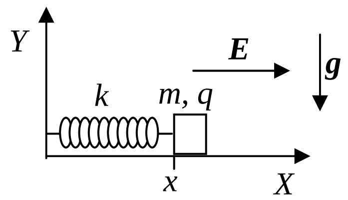
3. [Problema un po' complicato, per ora…: provatelo, se volete!] Un amico di Jules Verne scava un sottile tunnel da parte a parte della Terra lungo un suo diametro. Supponete la Terra come una sfera uniforme ed omogenea, di raggio R_T e densità ρ , ed immaginate che il tunnel scavato sia così sottile da non perturbare la simmetria sferica del sistema. L'amico lascia cadere nel tunnel un corpo puntiforme di massa m, con una velocità iniziale nulla.

a) Indicando con x la distanza dal centro della terra, con tanto di segno (cioè $x = R_T$ all'inizio, $x = -R_T$ se il corpo puntiforme raggiunge il punto diametralmente opposto a quello di partenza), e detta a l'accelerazione del corpo lungo questo asse, come si scrive l'equazione del moto in funzione di x? [Indicate con G la costante di gravitazione universale e supponete che non ci sia alcun altra forza, per esempio attrito, oltre a quella di attrazione gravitazionale]
$a(x)$ = ... $F_G/m = -(G/x^2)(\rho(4/3)\pi x^3) = -((4/3)G\pi\rho)\,x$ [notate che si tratta dell'equazione per un moto armonico con pulsazione $\omega = ((4/3)G\pi\rho)^{1/2}$]

b) Supponendo che il corpo puntiforme venga lasciato andare nel tunnel all'istante $t_0 = 0$, a quale istante t' esso raggiungerà il centro della terra? [Supponendo che lo raggiunga, altrimenti date una spiegazione del fatto che questo non si può verificare]
t' = ... $T/4$, con $T = (2\pi/4) / ((4/3)G\pi\rho)^{1/2}$ [come affermato sopra, si tratta di un moto armonico di ampiezza massima pari a R_T che avviene attorno al centro della terra $(x = 0)$ con pulsazione ω determinata sopra; dopo un quarto di periodo il corpo passa per il centro dell'oscillazione]

c) Cosa fa il corpo dopo aver raggiunto il centro della terra? [Sempre ammesso che ci arrivi...]
.... Continua a muoversi verso il punto diametralmente opposto a quello di partenza, che raggiunge e poi torna indietro; non essendoci attriti, il moto di oscillazione dura continuamente!

3. Una massa puntiforme m = 10 g, poggiata sul piano XY su cui può muoversi **senza attrito**, è attaccata ad un estremo di una molla di massa trascurabile, lunghezza di riposo l_0 = 5.0 cm e costante elastica $k = 4.0\mathrm{x}10^{-3}$ N/m. La molla è disposta lungo l'asse X di un sistema di riferimento, ed è vincolata al piano YZ come in figura. La massa porta una carica $q = 1.0\mathrm{x}10^{-4}$ C e nella ragione di spazio considerata è presente un campo elettrico costante ed uniforme diretto lungo il verso positivo dell'asse X e di modulo E = 2.0 N/C. Indicate con x la coordinata (generica) della posizione della massa sull'asse x, ovvero la posizione dell'estremo della molla.



a) Qual è la posizione di equilibrio x_{EQ} della massa?
x_{EQ} = ... = ... m $x_{EQ} = (q/k)E + l_0 = 1.0\mathrm{x}10^{-1}$ m [notate che la forza peso non ha alcun effetto essendo annullata dalla reazione vincolare del piano su cui poggia la massa; il risultato si ottiene uguagliando in modulo la forza elastica e quella elettrica]

b) La massa viene portata nella posizione $x_0 = 2x_{EQ}$ e, all'istante $t_0 = 0$, viene lasciata libera di muoversi da questa posizione partendo con velocità nulla. Come si scrive la legge oraria del moto della massa $x(t)$? [Ricordate **bene** quanto detto per il moto armonico, tenete in debito conto le condizioni iniziali e non usate numeri per dare questa risposta]
$x(t)$ = ... $x_{EQ}(\cos(\omega t) + 1)$, con $\omega = (k/m)^{1/2}$ [viene dalla soluzione dell'eq. differenziale $d^2x/dt^2 = -(k/m)(x-l_0) + (q/m)E$, che è del tipo $x(t) = \alpha\cos(\omega t+\delta) + x_P$; come soluzione particolare si può sciegliere $x_P = x_{EQ}$ ed i parametri α e δ si trovano dalle condizioni iniziali $x(0) = \alpha\cos\delta + x_{EQ} = 2x_{EQ}$ e $v(0) = -\omega\alpha\sin\delta = 0$, da cui $\delta = 0$ e $\alpha = x_{EQ}$]

c) Quanto vale la velocità v' con cui la massa si trova a ripassare per la posizione di equilibrio x_{EQ}?
v' = ... = ... m/s $-\omega x_{EQ} = -5.0\mathrm{x}10^{-3}$ m/s [viene dalla soluzione per la legge oraria della velocità, che è $v(t) = -\omega x_{EQ}\sin(\omega t)$, notando che l'istante t' in cui la massa ripassa per la posizione di equilibrio è $t' = T/4 = \pi/(2\omega)$, cioè è tale che $\omega t' = \pi/2$]

d) Supponete ora che sia presente anche una forza di attrito dinamico, dovuta ad un coefficiente di attrito μ_D tra massa e superficie su cui avviene il moto. Come si scrive in questo caso l'equazione del moto $d^2x(t)/dt^2$?
$d^2x(t)/dt^2$ = ... $-(k/m)(x-l_0) + (q/m)E \pm \mu_D g$, dove il segno della forza di attrito si oppone a quello della velocità [notate che, per questo motivo, la soluzione diventa molto più difficile da determinare, a meno di non impiegare metodi basati sul bilancio energetico]