

Corso di Laurea Ing. EA – ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 16

1. Una mole di gas perfetto biatomica, che inizialmente si trova nelle condizioni definite dalle variabili di stato $P_0 = 2.00 \times 10^5$ Pa, $V_0 = 2.00$ l subisce una "strana" trasformazione che segue la legge $PT^2 = costante$. [Notate che in questa trasformazione pressione, volume e temperatura variano tutte e tre, e ci disinteressiamo del meccanismo fisico che eventualmente la realizza!]

a) Quanto vale la temperatura iniziale T_0 ? [Prendete $R = 8.31$ J/(K mole) come valore della costante dei gas perfetti]

$$T_0 = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ K} \quad P_0 V_0 / (nR) = 48.1 \text{ K} \quad [\text{legge dei gas perfetti}]$$

b) Sapendo che alla fine della trasformazione il gas si trova alla pressione $P_1 = 8.00 \times 10^5$ Pa, quanto valgono la temperatura T_1 e il volume V_1 ?

$$T_1 = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ K} \quad T_0 (P_0 / P_1)^{1/2} = 24.1 \text{ K}$$

$$V_1 = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ K} \quad nRT_1/P_1 = nRT_0P_0^{1/2}/P_1^{3/2} = V_0(P_0/P_1)^{3/2} = 0.250 \text{ l}$$

c) Come si esprime la legge che lega pressione P e volume V per la trasformazione considerata?

$$\dots\dots\dots = \dots\dots \quad P^3 V^2 = costante = P_0^3 V_0^2 \quad [\text{si ottiene combinando la legge data con la legge dei gas perfetti}]$$

d) Quanto vale il lavoro L fatto o subito dal gas?

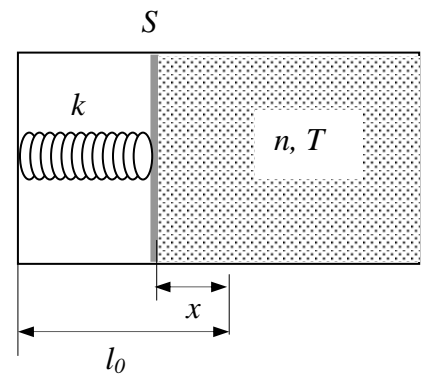
$$L = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ J} \quad \int_{V_0}^{V_1} P dV = P_0 V_0^{2/3} \int_{V_0}^{V_1} (1/V^{2/3}) dV = P_0 V_0^{2/3} 3 (V_1^{1/3} - V_0^{1/3}) = 3 P_0 (V_0^{2/3} V_1^{1/3} - V_0) = 3 P_0 V_0 ((P_0/P_1)^{1/2} - 1) = - (3/2) P_0 V_0 = - 600 \text{ J}$$

e) Quanto valgono variazione di energia interna ΔU del gas e calore Q da esso scambiato durante la trasformazione? [Ricordate che, per un gas perfetto biatomico, si ha $c_V = (5/2) R$]

$$\Delta U = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ J} \quad n c_V (T_1 - T_0) = n (5/2) R (T_1 - T_0) = n (5/2) R T_0 (1 - (P_0/P_1)^{1/2}) = (5/2) P_0 V_0 (1 - (P_0/P_1)^{1/2}) = - (5/6) L = 500 \text{ J} \quad [\text{con un po' di algebra!}]$$

$$Q = \dots\dots\dots = \dots\dots \text{ J} \quad L + \Delta U = L/6 = - 100 \text{ J}$$

2. Una quantità n di moli di un gas perfetto monoatomico è contenuta nel recipiente rappresentato in figura. Il recipiente è costituito da un cilindro di area di base S chiuso da un tappo di massa trascurabile scorrevole senza attrito. Al tappo è attaccata una molla di massa trascurabile e costante elastica k ; notate che nella parte di recipiente in cui è contenuta la molla è stato fatto il vuoto, cioè sul tappo **non** agisce la pressione atmosferica. Inizialmente il sistema è in equilibrio, il gas si trova alla temperatura T_0 e la molla si trova compressa per un valore x_0 rispetto alla sua lunghezza di riposo l_0 . Successivamente il gas viene riscaldato fino alla temperatura T_1 . In corrispondenza del riscaldamento si osserva che la molla viene compressa ulteriormente, fino a raggiungere il valore x_1 , con $x_1 < x_0$. [Si supponga che l'espansione del gas avvenga passando attraverso successivi stati di equilibrio]



a) Quanto valgono la pressione P_0 del gas ed il volume V_0 da lui occupato inizialmente?

$$P_0 = \dots\dots\dots = k x_0 / S \quad [\text{è la pressione dovuta alla forza della molla}]$$

$$V_0 = \dots\dots\dots = nRT_0/P_0$$

b) Come si scrive la relazione che lega la pressione P al volume V in questa trasformazione? [Suggerimento: usate la "geometria" del sistema!]

$$\dots\dots\dots = P = (k/S)x = (k/S)(V/S - l_0) = (k/S^2)V - kl_0/S$$

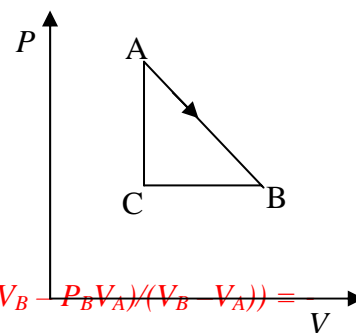
c) Quanto vale il lavoro L compiuto dal gas nella trasformazione?

$$L = \dots\dots\dots = -L_{ELA} = - (k/2) (x_1^2 - x_0^2) \quad [\text{il lavoro del gas è opposto a } L_{ELA} \text{ compiuto dalla molla, che, sulla base delle leggi della meccanica, ha l'espressione appena scritta}]$$

d) Quanto vale il calore Q scambiato dal gas nella trasformazione? [Per un gas monoatomico, ricordate che è $c_V = (3/2) R$]

$$Q = \dots\dots\dots L + \Delta U = - (k/2) (x_1^2 - x_0^2) + n(3/2)R (T_1 - T_0)$$

3. Una mole di gas perfetto monoatomico compie la trasformazione ciclica "triangolare" rappresentata in figura. I punti A, B, C in figura corrispondono a valori delle variabili di stato $P_A, V_A, T_A, P_B, V_B, T_B$, e P_C, V_C, T_C , rispettivamente. Pressioni e volumi sono noti dal grafico, e valgono le seguenti relazioni: $P_A = 2P_B$; $V_B = 2V_A$.



a) Come si scrive la legge della trasformazione A→B, cioè la relazione che lega P e V in questo tratto? [Suggerimento: determinate la relazione funzionale basandovi su semplici considerazioni "geometriche" sulla figura riportata]

$$P = \dots\dots\dots ((P_B - P_A)/(V_B - V_A))V + ((P_A V_B - P_B V_A)/(V_B - V_A)) = (P_B/V_A)V + 3P_B \quad [\text{è l'equazione della retta che congiunge i punti A e C}]$$

b) Quanto vale il lavoro L del gas nel ciclo? [Suggerimento: ricordate da cosa è rappresentato graficamente il lavoro in un ciclo termodinamico]

$$L = \dots\dots\dots (V_B - V_A)(P_A - P_B)/2 = P_B V_A / 2 \quad [\text{è l'area del triangolo descritto dal ciclo}]$$

c) Quanto valgono le temperature T_A, T_B e T_C ?

$$T_A = \dots\dots\dots P_A V_A / (nR) = P_A V_A / R = 2P_B V_A / R \quad [\text{legge dei gas perfetti con } n=1]$$

$$T_B = \dots\dots\dots P_B V_B / (nR) = P_B V_B / R = 2P_B V_A / R = T_A \quad !!!$$

$$T_C = \dots\dots\dots P_C V_C / (nR) = P_B V_A / R = P_B V_A / R = T_A / 2 \quad [\text{dato che } P_C = P_B \text{ e } V_C = V_A]$$

d) Quanto vale il calore Q scambiato dal gas nei tratti A→B, B→C, C→A? Discutetene anche il segno. [Suggerimento: ricordate le espressioni di $c_V = (3/2)R$ e $c_P = (5/2)R$]

$$Q_{AB} = \dots\dots\dots n c_V (T_B - T_A) + L_{AB} = L + P_B (V_B - V_A) = (3/2)P_B V_A > 0$$

$$Q_{BC} = \dots\dots\dots n c_P (T_C - T_B) = (5/2) (P_B V_A - P_B V_B) = -(5/2)P_B V_A < 0$$

$$Q_{CA} = \dots\dots\dots n c_V (T_A - T_C) = (3/2) (P_A V_A - P_B V_A) = (3/2)P_B V_A > 0$$

e) Quanto vale l'efficienza η di una macchina che funzioni secondo questo ciclo?

$$\eta = \dots\dots\dots L / (Q_{AB} + Q_{CA}) = 1/2 \quad [\text{dalla definizione di } \eta]$$

f) Commentate su un possibile confronto con l'efficienza di una macchina di Carnot "paragonabile" (cioè che lavori tra le stesse temperature massima e minima):

..... sarebbe $\eta_{\text{CARNOT}} = 1 - T_C/T_A = 1/2$ e sarebbe giustamente maggiore di quella trovata per lo strano ciclo triangolare considerato

4. Sapete che la variazione di entropia dS per una "piccola" trasformazione **reversibile** in cui un gas scambia una quantità di calore dQ vale $dS = dQ/T$, dove T è la temperatura "istantanea" del gas (notate che stiamo supponendo trasformazioni che coinvolgono variazioni **infinitesime** delle quantità in gioco, immaginando che ad esse possano essere associate variazioni infinitesime "esatte" del calore, affermazione non del tutto corretta dato che il calore non è una variabile di stato). Considerate ora trasformazioni reversibili tra stati "distanti" e supponendo una mole di gas perfetto monoatomico.

a) Quanto vale la variazione di entropia ΔS per una trasformazione **adiabatica**?

$$\Delta S = \dots\dots\dots 0 \quad [\text{è } dQ = 0!]$$

b) Quanto vale la variazione di entropia ΔS per una trasformazione **isocora** tra gli stati $P_0 T_0$ e $P_1 T_1$?

$$\Delta S = \dots\dots\dots \int_{T_0}^{T_1} (n c_V dT)/T = (3/2) R \int_{T_0}^{T_1} (1/T) dT = (3/2) R \ln(T_1/T_0) = (3/2) R \ln(P_1/P_0) \quad [\text{dal primo principio è } dQ = dU = n c_V dT; \text{ facendo l'integrale viene il risultato}]$$

c) Quanto vale la variazione di entropia ΔS per una trasformazione **isobara** tra gli stati $V_0 T_0$ e $V_1 T_1$?

$$\Delta S = \dots\dots\dots \int_{T_0}^{T_1} (n c_P dT)/T = (5/2) R \int_{T_0}^{T_1} (1/T) dT = (5/2) R \ln(T_1/T_0) = (5/2) R \ln(V_1/V_0) \quad [\text{dal primo principio stavolta è } dQ = dL + dU = n c_P dT; \text{ facendo l'integrale viene il risultato}]$$

d) Quanto vale la variazione di entropia ΔS per una trasformazione **isoterma** tra gli stati $P_0 V_0 T_0$ e $P_1 V_1 T_0$? [Suggerimento : notate che $dU = 0$ ed esprimete $dQ = PdV$]

$$\Delta S = \dots\dots\dots \int_{V_0}^{V_1} PdV/T_0 = (nRT_0/T_0) \int_{V_0}^{V_1} (1/V) dV = R \ln(V_1/V_0) = R \ln(P_0/P_1) \quad [\text{vedi sopra}]$$