Corso di Laurea Ing. EA – ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 20

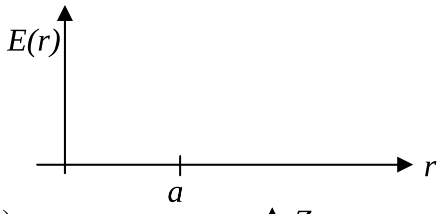
1. Un cilindro di altezza h e raggio a porta nel suo volume una densità di carica che è funzione del raggio secondo la legge $\rho(r) = \rho_0\, r^2/a^2$. La geometria del cilindro è tale che esso può essere considerato **molto lungo**, cioè si possono trascurare gli "effetti" che interessano le superfici di base
   a) Sulla base dei ragionamenti di simmetria e geometria, commentate sulla dipendenza dalle coordinate spaziali e sulla direzione del campo $\boldsymbol{E(r)}$ generato dalla distribuzione di carica.
   Dipendenza dalle coordinate spaziali: ……………………… il campo può dipendere solo dal modulo di r per ragioni di simmetria (c'è invarianza rispetto alla rotazione e rispetto alla traslazione assiale)
   Direzione: ……………………… il campo è diretto radialmente per ragioni di simmetria (ad esempio, il potenziale elettrostatico può solo dipendere da r e quindi le superfici equipotenziali sono cilindri coassiali: il campo deve essere ortogonale rispetto a loro, cioè radiale)

   b) Quanto vale la carica totale Q contenuta nel cilindro? [Attenzione: la ρ **non** è uniforme, per cui dovete considerare la definizione $\rho(r) = dq(r)/dV$!! Vi conviene considerare il cilindro come formto da tanti gusci cilindrici coassiali di spessore inifinitesimo dr]
   Q = …………………………………... $\int dq = \int \rho(r)\, dV = \int_0^a \rho(r)\, 2\pi r h dr = 2\pi\, h\, (\rho_0/a^2) \int_0^a r^3\, dr = \pi\, h\, \rho_0\, a^2/2$

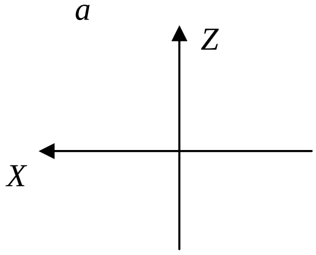
   c) Quanto vale il modulo del campo elettrico $E_{ext}(r)$ in un punto collocato a distanza r dall'asse del cilindro esternamente a questo?
   $E_{ext}(r)$ = …………………………………... $Q/(\varepsilon_0\, 2\pi h\, r) = \rho_0\, a^2/(\varepsilon_0\, 4\, r)$ [si ottiene applicando il teorema di Gauss ad una superfcie cilindrica di raggio $r > a$ che contiene il cilindro]

   d) Quanto vale il modulo del campo elettrico $E_{int}(r)$ in un punto collocato a distanza r dall'asse del cilindro internamente a questo?
   $E_{int}(r)$ = …………………………………... $(1\ /(\varepsilon_0\ 2\pi h\ r))\ \int_0^r\ \rho(r)\ 2\pi r h dr\ =\ \rho_0\ r^3/(\varepsilon_0\ 4\ a^2)$
   [come sopra, ma stavolta la carica interna alla superficie di Gauss **non** è tutta la Q, ma solo quella che si ottiene calcolando un integrale simile a quello del punto b), con gli estremi si integrazione che vanno da 0 a r (generico e tale che $r<a$)]

   e) Disegnate schematicamente l'andamento del modulo di $E(r)$ in funzione di r.



2. Considerate il piano $z = 0$ (è un piano XY collocato alla quota $z = 0$). Al di sotto del piano, cioè per $z < 0$, è presente il campo elettrico $\boldsymbol{E_1} = (a, 0, b)$, mentre al di sopra, cioè per $z > 0$, si trova il campo $\boldsymbol{E_2} = (0, 0, c)$; a,b,c sono componenti dei campi elettrici, tutte positive, opportunamente dimensionate e tali che $a = b$ e $c = 2a$.



   a) Indicate nel grafico accanto i vettori $\boldsymbol{E_1}$ ed $\boldsymbol{E_2}$.

   b) Quanto valgono le componenti dei campi E_{1n} ed E_{2n} ortogonali al piano $z = 0$?
   E_{1n} = …………………………………... b
   E_{2n} = …………………………………... c

   c) Quanto vale il flusso del campo elettrico $\Phi(\boldsymbol{E})$ attraverso un cilindretto con asse lungo Z, superficie di base ΔS ed altezza dz (infinitesima, cioè **trascurabile**)?
   $\Phi(\boldsymbol{E})$ = …………………………………... $(E_{2n} - E_{1n})\, \Delta S$, dove si è trascurato il flusso attraverso la superficie laterale (infinitesima) e si è assunto come positivo il segno corrispondente ad un campo diretto verso le z positive.

   d) Quanto vale la densità di carica superficiale σ presente sul piano $z = 0$?
   σ = …………………………………... $(E_{2n} - E_{1n})\varepsilon_0$ [dal teorema di Gauss applicato al cilindretto]

3. In una data regione di spazio (vuoto) è presente il campo elettrico $\boldsymbol{E} = (a, a, 0)$, con a componente opportunamente dimensionata.
   a) Quanto vale la **divergenza** del campo div$\boldsymbol{E}$? [Ricordate che, in coordinate cartesiane, è div$\boldsymbol{E}$ = $\partial E_X/\partial x + \partial E_Y/\partial y\ \partial E_Z/\partial z$, ovvero che l'equivalente "locale" del teorema di Gauss si scrive, nel vuoto: div$\boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$]
   div$\boldsymbol{E}$ = …………………………………... 0 [si vede o applicando l'operatore divergenza, oppure, molto più semplicemente, notando che il campo, **espresso in coordinate cartesiane**, è uniforme e quindi il flusso atraverso **qualsiasi** superficie chiusa è nullo, da cui, ricordando il legame tra divergenza del campo e teorema di Gauss, discende il risultato]

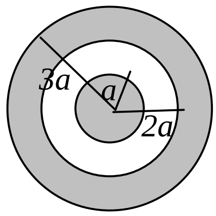
   b) Come sono fatte le superfici equipotenziali? Commentate ed eventualmente fate un disegnino:
   …………………………………... sono dei piani ortogonali al campo elettrico, cioè sono i piani che passano per la bisettrice del secondo e quarto quadrante del piano *XY* del sistema considerato (meglio fare un disegnino, è più chiaro!)

   c) Quanto vale la differenza di potenziale V tra i punti **A** = (0, 0, 0) e **B** = (d, D, -d), con d e D coordinate spaziali opportunamente dimensionate?
   V = …………………………………... $- a(d + D)$ [dalla definizione di differenza di potenziale]

4. In una data regione di spazio (vuoto) è presente il campo elettrico $\boldsymbol{E} = (ay, bx, 0)$, con a e b costanti opportunamente dimensionate (x ed y sono le coordinate spaziali del punto in cui si misura il campo).
   a) Quanto vale la **divergenza** del campo div$\boldsymbol{E}$?
   div$\boldsymbol{E}$ = …………………………………... 0 [si vede applicando l'operatore divergenza, ciè ricordando che, in coordinate cartesiane, essa è la somma delle derivate rispetto ad x, y ,z delle componenti x, y, z del campo; in alternativa, si può ragionare coon il teorema di Gauss, ma è un po' più laborioso, in questo caso]

   b) Tenendo conto del fatto che il campo elettrico deve essere conservativo (e quindi l'integrale di linea su una traiettoria chiusa deve essere nullo, ovvero rot$\boldsymbol{E}$ = 0), che relazione deve esistere tra le costanti a e b?
   a = …………………………………... b [si può vedere direttamente ricordando la definizione di rotore in coordinate cartesiane, oppure, in modo un po' più laborioso ma concettualmente più semplice, calcolandosi il lavoro su una traiettoria chiusa ed imponendo che questo faccia zero per qualsiasi scelta della traiettoria]

5. Il disegno rappresenta una sfera **conduttrice dotata di carica** Q raggio a circondata da un guscio sferico di raggio interno $2a$ e raggio esterno $3a$, anch'esso **conduttore** e dotato di **carica** $2Q$.



   a) In condizioni di equilibrio, quanto devono valere le densità di carica volumica ρ_1 e ρ_2 all'interno della sfera e del guscio?
   ρ_1 = …………………………………... 0 [all'equilibrio il campo in un conduttore deve essere nullo, così come la densità volumica di carica]
   ρ_2 = …………………………………... 0 [idem come sopra!!]

   b) Quanto vale il modulo del campo $E_{int}(r)$ presente nella regione (vuota) tra i due conduttori, cioè per $a < r < 2a$?:
   $E_{int}(r)$ = …………………………………... $Q/(\varepsilon_0 4\pi r^2)$ [dal teorema di Gauss, ovvero ricordando che è il campo generato da una carica puntiforme Q posta al centro della sfera!!]

   c) Quanto vale il modulo del campo $E_{ext}(r)$ presente all'esterno del sistema, cioè per $r > 3a$?:
   $E_{ext}(r)$ = …………………………………... $3Q/(\varepsilon_0 4\pi r^2)$ [come sopra, ma stavolta la carica contenuta è la somma di quella che si trova sulla sfera e sul guscio sferico]

   d) Quanto vale la carica Q_{2a} che si trova sulla superficie interna del guscio sferico, cioè ad $r = 2a$?
   Q_{2a} = …………………………………... $-Q$ [provate ad applicare il teorema di Gauss ad una superficie sferica **interna** al guscio sferico, dove il campo deve essere nullo: risulterà che la carica in essa contenuta deve anche essere nulla, ma questa è data dalla somma algebrica della carica Q' e della carica Q presente sulla sfera (anch'essa racchiusa dalla superficie di Gauss prescelta]

   e) Quanto vale la carica Q_{3a} che si trova sulla superficie esterna del guscio sferico, cioè ad $r = 3a$?
   Q_{3a} = …………………………………... $2Q+Q = 3Q$ [per la conservazione della carica, la somma di tutte le cariche presenti sulle superfici del guscio deve dare la carica totale del guscio, che valeva $2Q$, da cui il risultato]