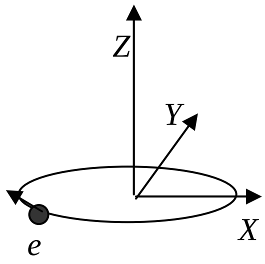
Corso di Laurea Ing. EA – ESERCIZI DI FISICA GENERALE – nr. 22



1. Un semplice modello per l'atomo di idrogeno (ovviamente scorretto dal punto di vista quantistico!) prevede che il protone sia fisso nello spazio, e l'elettrone ci ruoti attorno compiendo **un'orbita circolare uniforme** di raggio $a = 5\text{x}10^{-11}$ m come in figura. A questo movimento si può associare una corrente elettrica stazionaria I, e il modello, ai fini delle domande di questo problema, corrisponde ad una spira circolare percorsa da questa corrente. Per le risposte, usate il sistema di riferimento in figura, dove si vede che l'orbita appartiene al piano XY e che il senso di percorrenza è orario.
   a) Sapendo che la carica dell'elettrone vale $e = -1.6\text{x}10^{-19}$ C e supponendo che l'orbita venga percorsa con una velocità angolare $\omega = 3.9\text{x}10^{15}$ rad/s, quanto vale la corrente I? [Suggerimento: per rispondere, immaginate di traguardare un punto dell'orbita e di misurare quanta carica passa in un dato intervallo di tempo]
   I = …………………………………... = ……… A $|e|/(2\pi/\omega)$ =1.0 mA [si ottiene semplicemente da $I = |e|/T$, T essendo il periodo dell'orbita circolare]

   b) Quanto vale il **momento magnetico** μ dell'atomo in direzione, verso e modulo?
   Direzione e verso: …………………………… verso positivo dell'asse Z in figura [occhio: la carica dell'elettrone è negativa, e quindi la corrente, definita come flusso di cariche positive, gira in senso opposto; applicando la regola della mano destra si ottiene il risultato]
   μ = …………………………………... = ……… A m^2 $I \pi a^2 = 1.6\text{x}10^{-15}$ A m^2

   c) Questo semplice modello permette di interpretare grossolanamente alcuni aspetti di **magnetismo nella materia** (ad esempio, il comportamento di un materiale magnetizzato – un pezzo di calamita – può essere illustrato classicamente sulla base di "correnti elettroniche" di questo tipo). Determiniamo quindi il campo magnetico prodotto dalla nostra corrente, cominciando con il suddividere la "spira" in tanti elementini di lunghezza d$\boldsymbol{l}$. Quanto vale in modulo il contributo al campo magnetico d$\boldsymbol{B}(z)$ generato da d$\boldsymbol{l}$ in un punto appartenente all'asse ortogonale all'orbita (l'asse Z di figura) e posto ad una distanza z generica dal piano dell'orbita? Che direzione e verso ha? [Dovete esprimere la dipendenza funzionale usando i dati del problema, niente numeri! Potete anche fare un disegnino]
   d$B(z)$ = ………………………………….. $(\mu_0/4\pi)\, I\, \mathrm{d}l / (z^2 + a^2)$ [dalla "relazione costitutiva" del campo magnetico a partire dalle correnti, notando che la distanza tra il punto considerato ed un elementino dl di spira vale, per il teorema di Pitagora, $(z^2 + a^2)^{1/2}$]
   Direzione e verso: …………………………… direzione ortogonale rispetto a d$\boldsymbol{l}$ e alla congiungente $\boldsymbol{r}$ tra d$\boldsymbol{l}$ e il punto sull'asse, verso dato dalla regola della mano destra – fate il disegnino!

   d) Quanto vale la componente dB_z lungo l'asse Z del contributo infinitesimo di cui sopra?
   d$B_Z(z)$ = …………………………………... d$B(z)\, z/(z^2 + a^2)^{1/2}$ [dalla trigonometria]

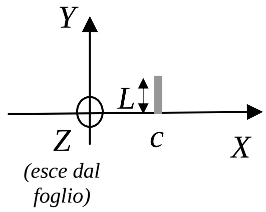
   e) Quanto in direzione, verso e modulo il campo magnetico $\boldsymbol{B}(z)$ generato da tutti gli elementini di spira?
   Direzione e verso: …………………………… verso positivo dell'asse Z: tutti i contributi ortogonali all'asse Z si annullano quando si considerano elementini di spira diametralmente opposti
   $B(z)$ = …………………………………... $(\mu_0/2)\, I\, az / (z^2 + a^2)^{3/2}$ [viene integrando il contributo infinitesimo della risposta d); notate che questo contributo infinitesimo non dipende dalla variabile di integrazione, per cui l'integrale si fa semplicemente moltiplicando per la lunghezza, ovvero la circonferenza $2\pi a$, della spira!]

   f) Supponendo ora che il nostro modellino atomico sia interessato da un campo magnetico **esterno** costante ed uniforme $\boldsymbol{B_0} = (b, 0, b)$, con $b = 1.0\text{x}10^{-3}$ T, quanto vale in modulo il momento delle forze M che agiscono sulla spira, calcolato rispetto all'asse Y ?
   M = …………………………………... = ………. N m $\mu\, b = 1.6\text{x}10^{-18}$ N m [viene dal prodotto vettoriale tra momento magnetico e campo esterno]

   g) Commentate sulla (o sulle) eventuali posizioni di equilibrio per la rotazione della spira (attorno all'asse Y) indotta dal momento delle forze:

…………………………………………….. per avere equilibrio dei momenti delle forze occorre che sia nullo il prodotto vettoriale, cioè che il momento magnetico sia parallelo o antiparallelo rispetto al campo esterno; considerazioni energetiche (che non abbiamo fatto) mostrano che nel primo caso l'equilibrio è instabile, nel secondo è stabile. Dunque preferenzialmente gli atomi del nostro modello tendono ad orientarsi in modo che la loro orbita sia ortogonale al campo esterno ("polarizzazione per orientamento").

2. In una regione di spazio è presente un campo magnetico disomogeneo $\boldsymbol{B} = (ax, by, 0)$, con a e b componenti opportunamente dimensionate.

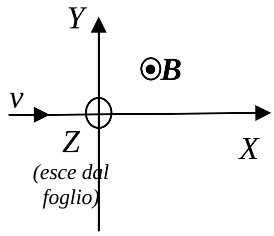


a) Ricordando l'"espressione locale" del "teorema di Gauss per il campo magnetico statico", quale relazione deve esistere tra le componenti a e b?
b = ……………………………………... *- a* [deve essere div$\boldsymbol{B}$ = $dB_X/dx + dB_Y/dy + dB_Z/dz = 0$, da cui il risultato; in alternativa si può calcolare il flusso su una superficie chiusa ed imporlo pari a zero, ma è molto più laborioso, vedi anche domanda c)]

b) Considerate una superficie rettangolare di altezza H e lato L parallela al piano $x = 0$, con uno spigolo in $x = c$ (c è un'opportuna coordinata spaziale e la figura riporta una sezione della superficie, un segmento, evidenziandola in grigio). Come si esprime, componente per componente, il versore $\boldsymbol{n}$ normale alla superficie (assumete positivo il verso che punta al I quadrante del sistema di riferimento)?
$\boldsymbol{n}$ = (………,………,………) *(1,0,0))* [dalla geometria del disegnino!]

c) Quanto vale il flusso del campo magnetico $\Phi(\boldsymbol{B})$ su questa superficie?
$\Phi(\boldsymbol{B})$ = ……………………………………... $\int_{RETT} \boldsymbol{B}(x,y)\cdot\boldsymbol{n}\, dS = \int_{RETT} B_X\, dS = \int_{RETT} ax\, dS = \int_0^H \int_0^L a\, c\, dz\, dy = a\, c \int_0^H \int_0^L dz\, dy = a\, c\, L\, H$ [il risultato è molto semplice, dato che coincide con il prodotto della componente X del campo calcolata nel punto $x = c$, per la superficie del rettangolo. Nei passaggi ho cercato di indicare come l'integrale sulla superficie sia un integrale "doppio" (lungo Y e lungo Z); poiché l'integrando non dipende da queste coordinate, allora si può "tirare fuori" dall'integrale e si ottiene il semplice risultato]

3. Degli atomi ionizzati una sola volta (cioè particelle dotate di carica positiva unitaria, e) e di massa m entrano con velocità v diretta lungo l'asse X (vedi figura) in una regione dove è presente un campo magnetico omogeneo di modulo B diretto lungo l'asse Z.



a) Quanto valgono il modulo F, la direzione e il verso della forza di natura magnetica risentita dagli ioni?
F = ……………………………………... *e v B*
Direzione e verso: …………………………. Lungo l'asse Y di figura, verso negativo

b) Commentate sul tipo di moto che compiono gli ioni in presenza del campo magnetico.
……………………………………………………… è un moto circolare sul piano XY in cui la forza magnetica ha il ruolo di forza centripeta

c) Supponendo che il campo magnetico sia presente solo nel semispazio $x > 0$, che gli ioni viaggino (nel semispazio $x < 0$) lungo l'asse x (come in figura), in quale punto y_0 dell'asse Y finiranno gli ioni? [Notate che la dipendenza dalla massa della posizione di arrivo che state calcolando è alla base degli "spettrometri di massa" a campo magnetico, strumenti analitici per determinare la massa di una specie atomica o molecolare]
y_0 = ……………………………………... *-2 mv / (eB)* [infatti, a parte il segno negativo che dipende dal segno della forza, questo è il diametro dell'orbita circolare percorsa dagli ioni, come si verifica uguagliando la forza centripeta mv^2/r con la forza magnetica – se disegnate sul grafico la traiettoria vedrete che si tratta proprio del loro punto di arrivo]

d) Quanto vale il lavoro L fatto dalle forze magnetiche durante il movimento degli ioni?
L = ……………………………………... 0 [forza e spostamento sono ortogonali tra loro!]